

Teoría de la Medida
Curso de Introducción

José C. Sabina de Lis
Universidad de La Laguna

29 de octubre de 2013

Índice general

PRÓLOGO	v
INTRODUCCIÓN	v
1. Medidas	1
1.1. Familias de conjuntos	1
1.2. Anillos, Álgebras	2
1.2.1. Ejercicios	4
1.3. Medidas	7
1.3.1. Medidas completas	12
1.3.2. Ejercicios	12
1.4. Medidas Exteriores	14
1.4.1. Construcción de medidas exteriores	17
1.4.2. Ejercicios	19
1.5. Medidas de Lebesgue y de Lebesgue-Stieltjes	21
1.5.1. Medida de Lebesgue	21
1.5.2. Medida de Lebesgue-Stieltjes	24
1.5.3. Existencia de conjuntos no medible-Lebesgue	25
1.5.4. Ejercicios	26
1.6. Medidas exteriores métricas	27
1.7. El conjunto ternario de Cantor	30
1.8. Medidas de Hausdorff	32
1.8.1. Ejercicios	34
1.9. Medidas con signo: cargas	39
1.9.1. Ejercicios	40
1.10. Soluciones	40
2. La integral de Lebesgue	43
2.1. Funciones medibles	43
2.1.1. Ejercicios	46
2.2. Convergencia	48
2.2.1. Ejercicios	52
2.3. Integración	53
2.4. Integral de Lebesgue	56

2.4.1. Ejercicios	59
2.5. Solución a los ejercicios	60
3. Convergencia	65
3.1. Propiedades básicas	65
3.1.1. Algunos resultados de convergencia	70
3.2. Teorema de la convergencia dominada	73
3.3. Integrales que dependen de parámetros	77
3.4. Ejercicios	79
4. La integral de Riemann	85
4.1. La integral de Riemann en $\mathbb{R}$	85
4.2. El teorema de Peano	91
4.3. Integral de Riemann n-dimensional	92
4.4. Ejercicios	96
5. Espacios L^p	101
5.1. Desigualdades	101
5.1.1. Desigualdades de Hölder y de Minkowski	104
5.2. Espacios L^p	105
5.3. Contenidos	108
5.4. Densidad	109
5.5. Ejercicios	113
6. Medidas producto	115
6.1. Medidas producto	115
6.2. El teorema de Fubini	119
6.3. El principio de Cavalieri	120
6.4. El teorema de Fubini en R^{m+n}	124
6.4.1. Ejercicios	127
6.5. El producto de convolución	128
6.6. Teorema de Cauchy–Peano, 2ª nota	131
6.7. Anexo	132
7. Diferenciación	139
7.1. Teorema de Lebesgue	139
7.2. Teorema de Radon–Nikodym	147
7.2.1. Función de Cantor	148
7.2.2. Teorema de Radón–Nikodym	149
7.2.3. Demostración del Teorema 7.11	154
8. Cambio de variable	157
8.1. Transformación de conjuntos medibles	157
8.2. Fórmula del cambio de variables para aplicaciones lineales	158
8.3. Caso general	159
8.4. Coordenadas esféricas	163

ÍNDICE GENERAL v

BIBLIOGRAFÍA 165

ÍNDICE ALFABÉTICO 167

Prólogo

Se recogen en las presentes notas las lecciones que sobre teoría de la medida e integración he impartido en la Universidad de La Laguna durante algunos cursos.

Conforman un material básico sobre el tema y compilan los ejercicios propuestos a los alumnos. Debe resaltarse que la materia es opcional y se imparte durante un cuatrimestre.

La Laguna, 29 de octubre de 2013.

Introducción

“El propio Arquímedes demuestra en el mismo libro (‘El Método’) que si en un cubo se introducen dos cilindros cuyas bases son tangentes a las caras del cubo, el segmento común de los cilindros será igual a dos tercios de cubo. Esto resulta de utilidad para las bóvedas que se construyen de esta manera. . .”

Herón, “La metrica”.

Citado en “El Código de Arquímedes” por R. Netz y W. Noel, “temas de hoy”, Madrid, 2007.

Áreas y volúmenes

La noción de medida es una generalización de las ideas de longitud, área o volumen. Como veremos, toda medida lleva además aparejada una correspondiente noción de integral. En este sentido la teoría de la medida se ocupa de asignar volumen a diversas clases de conjuntos abstractos y estudia las integrales, bajo condiciones muy generales, de clases amplias de funciones.

Consideremos, para fijar ideas, el caso del plano y repasemos a cuántos conjuntos sabemos asignarle un área. Primeramente la clase $\mathcal{R}$ de los rectángulos del plano

$$\mathcal{R} = \{\{a, b\} \times \{c, d\} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \leq b, c \leq d\},$$

donde las llaves significan que se consideran intervalos abiertos, cerrados o semicerrados. A cada $R \in \mathcal{R}$ se le asigna como medida $\mu(R)$ su área:

$$\mu(R) = (b - a)(d - c).$$

Esta noción de área se extiende a la clase más amplia de las “figuras elementales”

$$\mathcal{S} = \{S = \cup_{i=1}^n R_i : R_i \in \mathcal{R}\}$$

donde los rectángulos involucrados R_i son tales que sus interiores son disjuntos dos a dos. A cada $S \in \mathcal{S}$ se le asigna la medida natural

$$\mu(S) = \sum_{i=1}^n \mu(R_i).$$

La de las figuras elementales es a todas luces una clase demasiado restringida de conjuntos con área. Por eso se introduce la familia $\mathcal{J}$ de los conjuntos medible Jordan. Dado $E \in \mathbb{R}^2$ acotado se definen

$$\underline{\mu}(E) = \sup\{\mu(S) : S \in \mathcal{S}, S \subset \overset{\circ}{E}\},$$

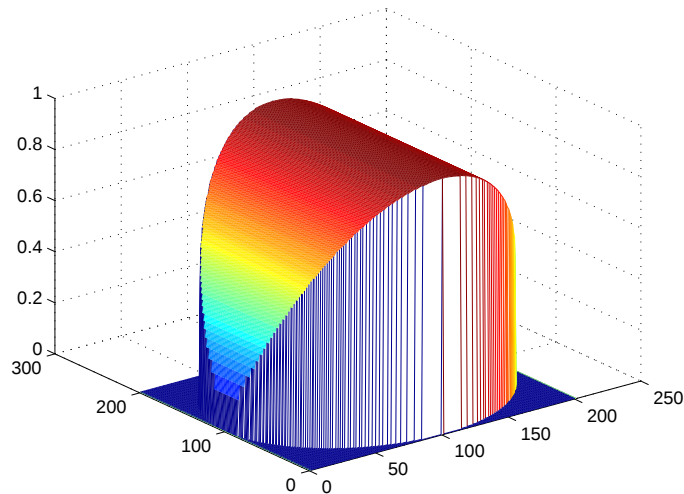
$$\bar{\mu}(E) = \inf\{\mu(S) : S \in \mathcal{S}, S \supset \overline{E}\},$$

los contenidos interior y exterior de Jordan, respectivamente. Se dice que $E \in \mathcal{J}$ si los dos contenidos coinciden. La noción de área así obtenida abarca a una clase razonable de conjuntos y tiene conexión directa con la integral de Riemann. De hecho, si χ_E es la función que vale 1 en E y cero fuera de E , χ_E es integrable Riemann si y sólo si $E \in \mathcal{J}$ y en ese caso

$$\mu(E) = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_E \, dxdy = \iint_E dxdy.$$

Uno de los objetivos de la teoría de la medida es extender esta noción de área a una clase todavía mayor de conjuntos, los conjuntos “medible-Lebesgue”, extendiendo además la noción de integral a una clase más amplia de funciones (la integral de Lebesgue). Este proceso tiene en general sus limitaciones.

Cúpula de Herón: intersección de dos cilindros inscritos en un cubo



Complecciones y espacios de funciones

La búsqueda de una noción de integral más amplia que la de Riemann no es caprichosa. Consideremos por ejemplo la siguiente cuestión fundamental. El espacio $X = C[a, b]$ de las funciones reales, continuas en el intervalo $[a, b]$ es una

generalización de dimensión infinita del espacio $\mathbb{R}^N$. De hecho, para $f \in X$, el valor $f(x)$ podría observarse como la coordenada x -ésima de f . La cantidad

$$|f|_2 = \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{1/2},$$

define una norma en X que lo hace espacio métrico ($|\cdot|_2$ puede observarse como la generalización de la norma euclídea). Sin embargo X no es completo y uno se plantea cuál es la compleción Y de este espacio métrico (se sabe que todo espacio métrico X puede sumergirse de manera densa en un único espacio métrico completo Y).

Como veremos, la completación de X es $L^2(a, b)$ que es el espacio de funciones f cuyo cuadrado f^2 es integrable en el sentido más general de Lebesgue.

De manera análoga, puede considerarse en $C[a, b]$ la norma (el equivalente de la norma $|\cdot|_1$ de $\mathbb{R}^N$)

$$|f|_1 = \int_a^b |f| dx.$$

El espacio métrico X_1 resultante no es completo.

Ejercicio 0.1. En el intervalo $[0, 1]$ se considera la sucesión de funciones $f_n(t)$ que valen 0 para $t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, 1 para $t \geq \frac{1}{2}$ y que se extienden por interpolación lineal a todo el intervalo. Pruébese que f_n es de Cauchy en $[0, 1]$ y sin embargo no converge.

La completación Z de X_1 es ahora $L^1(a, b)$ que es el espacio de las funciones integrable Lebesgue. En este caso, el operador lineal integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ (en sentido de Riemann) sobre X se extiende a un operador lineal I sobre $L^1(a, b)$ de suerte que para $f \in L^1(a, b)$, $I(f)$ es la integral de Lebesgue de f .

Los espacios de funciones $L^2(a, b)$ y $L^1(a, b)$ —y otros espacios similares de funciones integrables que estudiaremos— constituyen ejemplos fundamentales de espacios de dimensión infinita, materia de la que se ocupa el Análisis Funcional.

Series de Fourier

Otro problema importante del Análisis consiste en representar una función real f definida en, pongamos por caso, el intervalo $(-\pi, \pi)$, mediante una serie trigonométrica. Más precisamente, conseguir la igualdad

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1)$$

El problema, de gran solera en la matemática, se remonta a la época fundacional del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII. Para hacer verosímil tal representación lo primero es encontrar los coeficientes a_n , b_n . Un cálculo formal revela que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Ejercicio 0.2. Probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn},$$

($\delta_{mn} = 0$ ó 1 si $m \neq n$ ó $m = n$ respectivamente), mientras:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

La serie en (1) se denomina la serie de Fourier generada por f pues los coeficientes dependen de f a través de las integrales señaladas. Por tanto, encontrar la clase más general de funciones que pueden llegar a representarse de esa forma –padres del análisis como Daniel Bernoulli y J. Fourier afirmaban que *todas* las funciones eran factibles– requiere una noción de integral satisfactoria. B. Riemann introdujo –en la segunda mitad del XIX– su noción de integral precisamente para estudiar el problema de la convergencia de la serie de Fourier. El análisis del mismo se enriquece substancialmente cuando se trata en el marco de la integral de Lebesgue.

Integrales y paso al límite

Permutar la integral con el paso al límite es asimismo otra cuestión delicada que se presenta frecuentemente en las aplicaciones de la integral. En términos más técnicos se sabe que si las funciones f_n son integrables en sentido de Riemann en el intervalo $[a, b]$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b]$ entonces

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

o también

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n.$$

Sin embargo, la noción de convergencia uniforme es en la práctica sumamente “agresiva” y es deseable disponer de un concepto de integral que permute con una operación de “paso al límite” menos restrictiva. La integral de Lebesgue cumple a la perfección con esta demanda.

Estrechamente ligada a la cuestión de permutar integral y paso al límite se encuentra la diferenciación de integrales con respecto a parámetros (véase el Capítulo 3). Por poner un ejemplo de las aplicaciones, un planeta $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con densidad ρ genera un campo de fuerzas asociado al potencial V expresado por la fórmula

$$V(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \, d\xi d\eta d\zeta$$

donde G es la constante de gravitación. Las variables (x, y, z) tienen el valor de “parámetros” en la integral. En la física matemática interesa saber si V es o no

diferenciable. Se demuestra –según veremos– que si ρ es integrable Lebesgue en Ω entonces V es infinitamente diferenciable fuera de Ω y satisface allí la relación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ésta constituye una de las ecuaciones fundamentales de la física matemática (la ecuación de Laplace).

Ejercicio 0.3. Se considera la función:

$$V(x, y, z) = \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}},$$

donde ξ, η, ζ son constantes. Pruébese que cumple la ecuación de Laplace. Análogamente, compruébese que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

donde:

$$U(x, y) = \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

ξ, η constantes. En éste último caso: repasar la variable compleja.

Teorema fundamental del cálculo

En los primeros cursos de análisis se demuestra que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces la función F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

la integral entendida en sentido de Riemann, es derivable en $[a, b]$ y su derivada vale

$$F'(x) = f(x). \quad (2)$$

Este hecho constituye el teorema fundamental del cálculo.

Ejercicio 0.4. Sea $f \in C[a, b]$.

1. Probar que si $m \leq f(t) \leq M$ entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$.
2. Probar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b - a).$$

3. Probar que la función F definida más arriba es continua.
4. Probar el teorema fundamental del cálculo tal como se ha enunciado.

Si una función acotada f en $[a, b]$ es integrable en sentido de Riemann (Capítulo 4) resulta que F es continua en $[a, b]$ mientras que (2) se cumple en todos los puntos x de continuidad de f . Obsérvese que f puede ser menos regular que continua y todavía ser Riemann integrable. De hecho se sabe que f es integrable Riemann si el conjunto D de sus puntos de discontinuidad es pequeño en el sentido de que tiene “medida cero” (Capítulo 4). Por lo tanto, por el mero hecho de ser f integrable, F resulta ser derivable en “la mayoría” de los puntos de $[a, b]$.

El problema de la derivabilidad de F se enriquece notablemente cuando se considera la integral en el sentido de Lebesgue. En este caso se pueden caracterizar quiénes son las funciones F que provienen de funciones integrables f en la forma indicada (F se denomina una primitiva de f). Véanse más detalles en el Capítulo 7.

Una cuestión relacionada es la siguiente. Se sabe que toda función f monótona en $[a, b]$ es discontinua a lo sumo en un conjunto numerable de puntos (por tanto y en algún sentido es continua en la mayoría de los puntos del intervalo). La cuestión es saber qué sucede con la diferenciabilidad de la función. Dentro del marco de la teoría de Lebesgue se da cumplida respuesta al problema.

Física matemática

En la física y más en general en las aplicaciones, las funciones que representan los estados de los diversos sistemas bajo estudio distan mucho de ser regulares. Áreas como los medios continuos –que dominan la elasticidad y la mecánica de fluidos– están plagados de ecuaciones diferenciales que requieren que las funciones involucradas sean al menos diferenciables.

A tales efectos, la noción de función diferenciable se puede extender cuando se usa un concepto de integral más flexible que el de Riemann. Para fijar ideas se recuerda que si f es de clase C^1 en $[a, b]$ con derivada $g = f'$ entonces

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x) \, dx = - \int_a^b g(x)\varphi(x) \, dx, \quad (3)$$

para toda función φ de clase C^1 en $[a, b]$ que se anule en los extremos: $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Sin embargo, dicha identidad tiene pleno sentido si sólo se supone que f y g son integrables. Si f es una función integrable (como luego veremos, en sentido de Lebesgue) tal que existe otra función integrable g de suerte que se cumple la identidad precedente para toda φ de clase C^1 en las condiciones señaladas, se dice entonces que g es la derivada generalizada de f . A través de lo que se conoce como cálculo de variaciones, esta noción de derivada es lo suficientemente flexible como para atender las demandas de muchos problemas de las aplicaciones. A título de ejemplo puede comprobarse que si $f(x) = |x|$ entonces $g(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ pudiéndosele asignar a g cualquier valor en $x = 0$.

Ejercicio 0.5. Compruébese la relación (3) y la última afirmación.

Cálculo de probabilidades

La teoría de la medida proporciona el marco abstracto adecuado sobre el que desarrollar el cálculo de probabilidades. Históricamente, resultados tan importantes como el teorema central del límite no pudieron probarse rigurosamente hasta que la materia no se codificó en el lenguaje de dicha teoría.

Consideraciones generales

En los comienzos de la teoría, a finales del XIX y principios del XX se pretendía asignar a *todo* conjunto E de $\mathbb{R}^N$ un número positivo $\mu(E)$ de suerte que dicho valor coincidiera con el volumen de E cuando éste fuese calculable por las técnicas del cálculo integral (contenido de Jordan). La función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ debería gozar de las siguientes propiedades:

1. $\mu(\cup E_n) = \sum \mu(E_n)$ cuando los E_n son disjuntos dos a dos.
2. μ es invariante frente a movimientos rígidos (traslaciones + transformaciones ortogonales).
3. $\mu(Q) = 1$ sobre el cubo unidad $Q = \{x : 0 < x_i < 1, i = 1, \dots, N\}$.

Es importante para las aplicaciones (método de exhaustión) que la unión en 1) pueda ser infinita.

Sin embargo, se demostró a principios del XX que una tal función de conjunto μ no podía tener como dominio a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, es decir la totalidad de las partes de $\mathbb{R}^N$. Uno de los objetivos del curso es construir μ describiendo su dominio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ (los conjuntos medible-Lebesgue) que por consiguiente resulta estrictamente menor que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Merece la pena resaltar que para $N \geq 3$ tampoco puede existir una función de conjunto μ con dominio $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ y valores en $[0, \infty]$ cumpliendo 2), 3) y donde 1) se limita a uniones *finitas*. Es decir,

- 1)' $\mu(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n)$, los E_k son disjuntos dos a dos.

Este hecho es consecuencia de lo que se conoce como “paradoja” de Banach-Tarski ([8]) que no es en absoluto una paradoja. En 1924 Banach y Tarski demostraron que “dos abiertos acotados U, V de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) admiten sendas particiones $E_1, \dots, E_n$ y $F_1, \dots, F_n$ de suerte que E_i es congruente con F_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ ”. En otras palabras la esfera unidad U se puede descomponer en n pedazos que ensamblados dan lugar a dos esferas disjuntas del mismo radio, U y $U + 3e_1$, por ejemplo.

Capítulo 1

Medidas. Medidas Exteriores

1.1. Familias de conjuntos

Se supondrá que todos los conjuntos $A, B, \dots$ con los que trataremos son subconjuntos de uno fijo X de referencia. Asimismo, las clases $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{R}, \dots$, familias $\{E_i\}_{i \in I}$ o sucesiones $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos tendrán por elementos conjuntos que son partes de X .

Diremos que $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, abreviadamente $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$, si $E_n \subset E_{n+1}$ para cada n . $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente ($\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \searrow$) si para todo n : $E_n \supset E_{n+1}$.

Por analogía con las sucesiones reales para E_n monótona se define:

$$\lim E_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

si E_n es creciente,

$$\lim E_n = \cap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

si E_n es decreciente.

Para una sucesión arbitraria E_n se construyen las sucesiones auxiliares,

$$A_n = \cap_{k \geq n} E_k \quad B_n = \cup_{k \geq n} E_k.$$

Al ser monótonas existen los límites de ambas sucesiones. Se definen los límites inferior y superior de E_n como:

$$\underline{\lim} E_n = \lim A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} (\cap_{k \geq n} E_k),$$

mientras

$$\overline{\lim} E_n = \lim B_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \cap_{n=1}^{\infty} (\cup_{k \geq n} E_k).$$

Definición 1.1. Se dice que E_n converge a E si

$$\underline{\lim} E_n = \overline{\lim} E_n = E.$$

Ejercicio 1.1. Hallar $\underline{\lim} E_n, \overline{\lim} E_n$ si $E_n = (\frac{(-1)^n}{n}, 2)$.

Ejercicio 1.2. Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \nearrow, \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \searrow$, de suerte que:

$$A_n \subset B_n,$$

para cada n . Probar que $\lim A_n \subset \lim B_n$.

1.2. Anillos, Álgebras

Definición 1.2. Sea $\mathcal{R}$ una clase no vacía¹ de subconjuntos de X . Se dice que $\mathcal{R}$ es un anillo si satisface las siguientes propiedades:

$$i) \ A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

$$ii) \ A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}.$$

Si $\mathcal{R}$ cumple además:

$$iii) \ X \in \mathcal{R},$$

se dice que $\mathcal{R}$ es un álgebra.

Se sigue de la definición que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$ tomando $A \in \mathcal{R}$.

Propiedad 1.3. Sea $\mathcal{R}$ una clase de partes de X cumpliendo las propiedades ii) y

$$iv) \ A \in \mathcal{R} \Rightarrow A^c \in \mathcal{R}.$$

Entonces $\mathcal{R}$ es un álgebra. Por tanto, un álgebra es toda clase $\mathcal{R}$ de partes de X que es cerrada frente a uniones finitas y complementación.

Propiedad 1.4. Sea $\mathcal{R}$ un anillo, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$. Entonces:

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{R} \quad A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{R}.$$

Propiedad 1.5. Sea $\mathcal{R}$ una clase de subconjuntos de X que cumple las propiedades i) y

$$ii') \ A, B \in \mathcal{R} \ \& \ A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}.$$

Entonces $\mathcal{R}$ es un anillo. Por tanto i), ii') caracterizan la propiedad de ser anillo.

Definición 1.6. Se dice que una clase $\mathcal{A}$ es un σ -anillo si cumple i) junto con:

$$ii-s) \ \cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \text{ para toda sucesión } \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathcal{A}.$$

Es inmediato comprobar que un σ -anillo es un anillo.

¹En adelante daremos por sobreentendido que las diversas clases o familias de conjuntos implicadas son no vacías.

Definición 1.7. Se llama σ -álgebra a todo σ -anillo que es un álgebra.

Propiedad 1.8. Sea $\mathcal{A}$ una clase que cumple i) junto con

ii-s') $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ para toda sucesión $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ de elementos disjuntos dos a dos.

Entonces $\mathcal{A}$ es un σ -anillo. Por tanto i) y ii-s') caracterizan los σ -anillos.

Ejemplo 1.1.

$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ numerable } \text{ ó } A^c \text{ numerable}\}$ es una σ -álgebra.

$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ finito } \text{ ó } A^c \text{ finito}\}$ es un álgebra, pero sólo es σ -álgebra cuando X es finito.

Se introducen en los ejercicios del capítulo las nociones de anillo (σ -anillo) y álgebra (σ -álgebra) generada por una clase $\mathcal{D}$ de conjuntos de X .

Definición 1.9. Sea $\mathcal{G}$ la clase de los abiertos de $\mathbb{R}$. La σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ generada por $\mathcal{G}$ se llama la σ -álgebra de los conjuntos de Borel. Más generalmente, si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la σ -álgebra $\mathcal{B}_X$ de los conjuntos de Borel es la generada por la familia $\mathcal{T}$ de los abiertos de X .

Ejercicio 1.3. Sea $\mathcal{R}$ una clase no vacía de partes de X que cumple:

$$1) A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}.$$

$$2) A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \triangle B,$$

con $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$. Entonces $\mathcal{R}$ es un anillo. Así 1), 2) caracterizan los anillos.

Ejercicio 1.4. Sea $\mathcal{A}$ una clase de conjuntos que cumple iv) junto con ii-s). Probar que $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra.

Ejercicio 1.5. Pruébese que todo abierto G de $\mathbb{R}$ se puede escribir como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

Indicación. Las componentes conexas de G son intervalos abiertos y forman una partición de G . Alternativamente, para $x \in G$ se llama $I_x = \bigcup_{x \in I} I$ donde la unión se extiende a los intervalos abiertos $I \subset G$.

Ejercicio 1.6. Se consideran en $\mathbb{R}$ las siguientes clases de intervalos $\mathcal{D}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{D}_2 = \{[a, b]\}$, $\mathcal{D}_3 = \{(a, b]\}$, $\mathcal{D}_4 = \{[a, b)\}$, $\mathcal{D}_5 = \{(a, \infty)\}$, $\mathcal{D}_6 = \{[a, \infty)\}$, $\mathcal{D}_7 = \{(-\infty, b)\}$, $\mathcal{D}_8 = \{(-\infty, b]\}$. Probar que $\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ donde $\mathcal{D}$ es cualquiera de las clases de intervalos que acabamos de introducir.

Proposición 1.10. Todo abierto $G \subset \mathbb{R}^N$ puede representarse en la forma $G = \bigcup Q_n$ donde Q_n es una sucesión de intervalos disjuntos de la forma $[\bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^N$.

Demostración. Denotamos C_m la familia de cubos diádicos $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$. Fijado $x \in \mathbb{R}^N$, para cada m existe un único $Q \in C_m$ tal que $x \in Q$. En efecto, los cubos de C_m son una partición de $\mathbb{R}^N$. Por otra parte si $Q \in C_m$, $Q' \in C_{m'}$ son cubos diádicos y $m' \leq m$ entonces $Q \subset Q'$ si $Q \cap Q' \neq \emptyset$. Esto es consecuencia de que para $m' \leq m$ todo cubo $Q \in C_m$ yace en un único $Q' \in C_{m'}$.

Para $x \in G$ llamamos m al mínimo n tal que $x \in Q \subset G$ con $Q \in C_n$ y ponemos $Q = Q_x$.

Observamos ahora que $Q_x \cap Q_y \neq \emptyset$ sí y sólo si $Q_x = Q_y$. Por tanto, si definimos en G la relación $x \sim y$ si $y \in Q_x$, cada clase $[x] = Q_x$ y hay un conjunto numerable de clases. $\square$

1.2.1. Ejercicios

A) Anillos, σ -anillos, álgebras, σ -álgebras.

1. Sean a_n, b_n , sucesiones reales *monótonas* tales que $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $a < b$, mientras $E_n = (a_n, b_n)$. Pruébese que $E = \lim E_n$ existe, calculando su “valor”.
2. Para $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X se definen:

$$E^* = \{x \in X : x \in E_n \text{ para infinitos } n \in \mathbb{N}\},$$

$$E_* = \{x \in X : x \in E_n \text{ excepto para un número finito de } n \in \mathbb{N}\}.$$

Pruébese que $E_* = \underline{\lim} E_n$ y que $E^* = \overline{\lim} E_n$.

3. Si $\{E_n\}$ es una sucesión en X pruébese que:

$$(\overline{\lim} E_n)^c = \underline{\lim} E_n^c,$$

$$(\underline{\lim} E_n)^c = \overline{\lim} E_n^c.$$

4. Si $\mathcal{R}$ es sólo un σ -anillo y $\{E_n\} \subset \mathcal{R}$ probar que:

$$\cap_n E_n \in \mathcal{R}, \quad \underline{\lim} E_n \in \mathcal{R}, \quad \overline{\lim} E_n \in \mathcal{R}.$$

5. Sea $\mathcal{R}$ un σ -anillo en X , $Y \subset X$, $Y \in \mathcal{R}$. Probar que $\{Y \cap E : E \in \mathcal{R}\}$ es una σ -álgebra en Y .
6. Si $\{\mathcal{R}_\alpha\}$ es una familia de anillos (respectivamente, σ -anillos, álgebras, σ -álgebras) probar que $\cap_\alpha \mathcal{R}_\alpha$ es un anillo (respectivamente, σ -anillo, álgebra, σ -álgebra).
7. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de X . Demuéstrese que existe un único anillo $\mathcal{R}$ (respectivamente, σ -anillo, álgebra, σ -álgebra) con la propiedades:
 - a) $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$,

- b) Si $\mathcal{R}'$ es un anillo (respectivamente, σ -anillo, álgebra, σ -álgebra) con $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}'$ entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

Denotamos $\mathcal{R}$ por $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ y lo denominamos el anillo generado por $\mathcal{D}$. Utilizaremos $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ en el caso de σ -anillos.

8. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de X . Demuéstrese que cada elemento de $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ puede recubrirse con un número finito de elementos de $\mathcal{D}$, es decir está contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{D}$.

Nota. El ejercicio no demanda probar que $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ es la clase de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{D}$ (hecho que por otro lado no es cierto). Un comentario similar se aplica al ejercicio siguiente.

9. Sea $\mathcal{D}$ una clase de subconjuntos de X . Demuéstrese que cada elemento de $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ puede recubrirse con una familia numerable de elementos de $\mathcal{D}$, es decir está contenido en una unión numerable de elementos de $\mathcal{D}$.
10. Sea $\mathcal{D}$ la clase de todos aquellos conjuntos en X que son finitos o tienen complemento finito. Probar que $\mathcal{D}$ es un anillo mientras que si X no es finito, $\mathcal{D}$ no es un σ -anillo.
11. En $X = \mathbb{R}$ consideramos $\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^n J_k : J_k = (a_k, b_k], J_i \cap J_l = \emptyset \ i \neq l\}$. Demostrar que $\mathcal{A}$ es un anillo pero no un álgebra.
12. En el ejercicio 11 reemplazamos en $\mathcal{A}$ los intervalos $(a_k, b_k]$ por intervalos arbitrarios $\{a_k, b_k\}$. Muéstrese que $\mathcal{A}$ también es un anillo.
13. En $X = \mathbb{R}$ consideramos ahora $\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^n J_k : J_k = (a_k, b_k], J_i \cap J_l = \emptyset \ i \neq l\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) : b \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $\mathcal{A}$ es un álgebra pero no una σ -álgebra.
14. Obténgase la misma conclusión que en el ejercicio 13 tomando la clase $\{a_k, b_k\}$ de intervalos arbitrarios, con $-\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty$.

- ♣ En [8] p. 23 se introduce la noción de “clase elemental”. Una clase $\mathcal{E}$ de partes de X se denomina elemental si: $\emptyset \in \mathcal{E}$, $A \cap B \in \mathcal{E}$ cuando $A, B \in \mathcal{E}$ y A^c es unión finita disjunta de elementos de $\mathcal{E}$ para todo $A \in \mathcal{E}$. Demuéstrese que la clase $\mathcal{A}$ de las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{E}$ es un álgebra. Las álgebras de los ejercicios 13, 14 corresponden a este patrón. También la del ejercicio 15.

Indicación. Resulta de utilidad la identidad:

$$(\cup_{i \in I} A_i) \cap (\cup_{j \in J} B_j) = \cup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j.$$

15. En $\mathbb{R}^2$ consideramos $\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^n J_k : J_k = \{a_k, b_k\} \times \{c_k, d_k\}, J_i \cap J_l = \emptyset \ i \neq l\}$ (la clase de los conjuntos “elementales”) donde $\{a, b\}$ designa uno cualquiera de los cuatro tipos de intervalos con extremos a, b incluyendo extremos infinitos. Probar que $\mathcal{A}$ es un álgebra. Generalizar el resultado a $\mathbb{R}^N$.

16. Usando la definición del ejercicio 14 sean $\mathcal{E}_i \subset X_i$ clases elementales en los conjuntos X_i , $i = 1, 2$. Probar que $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ es una clase elemental en $X_1 \times X_2$.
17. En un conjunto X se toma $\mathcal{D} = \{\{a\}, \{b\}\}$ con $a \neq b$. Hallar $\mathcal{R}(\mathcal{D})$.

1.3. Medidas

La recta real ampliada $\overline{\mathbb{R}}$ es $\mathbb{R}$ con la adición de dos nuevos elementos $-\infty$, $+\infty$ más las siguientes propiedades:

- 1) $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $x \pm \infty = \pm \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$; $\pm \infty \pm (\pm \infty) = \pm \infty$; $x \cdot (\pm \infty) = \pm \infty$ si $x > 0$, $x \cdot (\pm \infty) = \mp \infty$ si $x < 0$.

Observación 1.2. No se definen las operaciones $0 \cdot (\pm \infty)$ ni $\pm \infty \mp (\pm \infty)$.

Observación 1.3. Un buen modelo de la recta ampliada $\overline{\mathbb{R}}$ se consigue identificando $\mathbb{R}$ con $(-1, 1)$ con la función $f(x) = \arctag x$, $\overline{\mathbb{R}}$ con $[-1, +1]$. Los puntos ± 1 juegan el papel de $\pm \infty$.

Una aplicación μ con valores en $\overline{\mathbb{R}}$ cuyo dominio es una clase $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X se denomina una función de conjunto (en X).

Definición 1.11. Una función de conjunto $\mu : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{D}$ una clase de partes en X , se dice finitamente aditiva si cualesquiera que sean $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{D}$ con $E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{D}$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ para $n \neq m$ se satisface:

$$\mu(\cup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k).$$

Se dice que μ es completamente aditiva si

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

siempre que $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea una sucesión en $\mathcal{D}$ con $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}$ cuyos elementos son disjuntos dos a dos, es decir $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Ejemplo 1.4.

a) En el álgebra $\mathcal{A}$ del ejercicio 1.1.13,

$$\mathcal{A} = \{A = \cup_{k=1}^n J_k : J_k = (a_k, b_k], J_i \cap J_l = \emptyset \text{ si } i \neq l\},$$

$-\infty \leq a_k < b_k \leq +\infty$, definimos la función “longitud”

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \lambda(J_k), \quad A = \cup_{k=1}^n J_k,$$

donde $J_k = (a_k, b_k]$ y $\lambda(J_k) = b_k - a_k$ siendo $\lambda(J_k) = \infty$ si el intervalo es infinito. μ es finitamente aditiva en $\mathcal{A}$.

b) En el álgebra $\mathcal{A}$ del ejercicio 1.1.15,

$$\mathcal{A} = \{A = \cup_{k=1}^n J_k : J_k = \{a_k, b_k\} \times \{c_k, d_k\}, J_i \cap J_l = \emptyset \text{ } i \neq l\},$$

si define análogamente

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_2(J_k),$$

donde $\lambda_2(J_k) = \lambda(\{a_k, b_k\})\lambda(\{c_k, d_k\})$ y asimismo $\lambda(\{a_k, b_k\}) = b_k - a_k$. μ es finitamente aditiva.

La definición importante es la siguiente.

Definición 1.12. Sean $\mathcal{A}$ una σ -álgebra y $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ una función de conjunto. Se dice que μ es una medida si $\mu(\emptyset) = 0$ y μ es completamente aditiva.

No es inmediato construir medidas no triviales. De ello tratamos en este capítulo. El ejemplo anterior no vale porque $\mathcal{A}$ no es una σ -álgebra. Sin embargo, es la semilla que da lugar a la medida de Lebesgue (véase la Sección 1.4).

Definición 1.13. Sea μ una medida en X con dominio $\mathcal{A}$. Se dice que μ es finita si $\mu(X) < \infty$. Se dice que μ es σ -finita si $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde $\mu(E_n) < \infty$ para cada n .

Teorema 1.14. Sea μ una medida en X y dominio $\mathcal{A}$. Entonces:

$$i) \ E, F \in \mathcal{A}, \ E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F).$$

$$ii) \ E, F \in \mathcal{A}, \ E \subset F, \ \mu(F) < \infty \Rightarrow \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

iii) $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$ implica

$$\mu(\lim E_n) = \lim \mu(E_n).$$

iv) $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \searrow$ junto con la condición $\mu(E_{n_0}) < \infty$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ implican que:

$$\mu(\lim E_n) = \lim \mu(E_n). \quad (1)$$

Observación 1.5.

a) La condición $\mu(F) < \infty$ en ii) es necesaria para prevenir el caso $\mu(E) = \mu(F) = \infty$.

b) Que $\mu(E_n)$ sea finito para algún n en iv) es necesario para la validez de (1). En efecto, veremos que la medida de Lebesgue μ en $\mathbb{R}$ asigna a cada intervalo su longitud (finita o no). La sucesión $E_n = (-\infty, -n)$ da un contraejemplo a (1).

Teorema 1.15. Sea μ una medida en X con dominio en la σ -álgebra $\mathcal{A}$. Para $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ se cumplen:

i)

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

ii)

$$\mu(\varliminf E_n) \leq \varliminf \mu(E_n).$$

iii) Si $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$ se tiene:

$$\mu(\overline{\varliminf E_n}) \geq \overline{\varliminf} \mu(E_n).$$

La siguiente definición recoge el concepto de familia sumable.

Definición 1.16. Sea $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Se define

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) : F \subset X, F \text{ finito} \right\}.$$

Una curiosa observación.

Proposición 1.17. Si para $f : X \rightarrow [0, \infty]$ el conjunto $\{f(x) > 0\}$ es no numerable entonces

$$\sum_{x \in X} f(x) = \infty.$$

Ejemplos 1.6. En los ejemplos que siguen $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$

a) Si para $f : X \rightarrow [0, \infty]$ se define

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x),$$

entonces μ define una medida (ver más abajo).

b) Si en a) se toma $f(x) = 1$ para cada x la medida μ cuenta los elementos de E .

c) Si para $x_0 \in X$, $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ entonces μ se llama la medida de Dyrac (concentrada en el punto x_0).

Demostración de la Prop. 1.17. Como

$$\{f > 0\} = \cup_n \{f > \frac{1}{n}\} :=$$

existe n tal que $\{f > \frac{1}{n}\}$ es no numerable. Para todo $F \subset \{f > \frac{1}{n}\}$ finito

$$\sum_F f > \frac{\text{card } F}{n}.$$

Como pueden encontrarse partes F de cardinal tal grande como se desee resulta

$$\sum_{x \in X} f(x) = \infty.$$

□

Observación 1.7. La proposición afirma que, esencialmente, sólo podemos esperar sumas finitas cuando X es numerable. Ese es el caso de las series múltiples.

Si en la definición previa $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$, $a_n := f(n)$, se tiene:

Proposición 1.18.

$$\sum_{\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

En el caso en que $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow [0, \infty]$, $f(i, j) = a_{ij}$,

$$\sum_{\mathbb{N}^2} a_{ij}$$

es lo que se conoce como la suma de una serie doble (más propiedades un poco después).

Propiedad 1.19. Sean $f : X \rightarrow [0, \infty]$, $A \subset X$. Se define

$$\mu(A) = \sum_A f(x) \quad \mu(\emptyset) = 0.$$

Entonces μ es una medida en $\mathcal{P}(X)$.

Demostración. En primer lugar, es evidente que μ es monótona.

En segundo lugar, probamos que μ es finitamente aditiva para lo que tomamos $A_1, \dots, A_m$ disjuntos. Si

$$F \subset A_1 + \dots + A_m,$$

es finito,

$$\sum_F f = \sum_{(F \cap A_1) + \dots + (F \cap A_m)} f = \sum_{F \cap A_1} f + \dots + \sum_{F \cap A_m} f \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m).$$

Luego

$$\mu(A_1 + \dots + A_m) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m).$$

Para la desigualdad contraria basta con suponer que los $\mu(A_i)$ son todos finitos. En ese caso, dado $\varepsilon > 0$ existen $F_i \subset A_i$ finitos tales que:

$$\mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{m} \leq \sum_{F_i} f$$

Así

$$\mu(A_1) + \dots + \mu(A_m) - \varepsilon \leq \sum_{F_1 + \dots + F_m} f \leq \mu(A_1 + \dots + A_m).$$

Para probar que μ es completamente aditiva observamos que si $A = \cup A_n$, $F \subset A$ finito, $F \subset A_1 + \dots + A_m$ para algún m con lo que

$$\sum_F f \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Con ello

$$\mu(\cup A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Para la desigualdad contraria nótese que:

$$A_1 + \cdots + A_m \subset \cup A_n,$$

por lo que

$$\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_m) = \mu(A_1 + \cdots + A_m) \leq \mu(\cup A_n),$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\cup A_n).$$

□

Siguen algunas consecuencias para series y series dobles.

Proposición 1.20. Sean $a_n \geq 0$, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una biyección y $\{\mathcal{N}_n\}$ una partición de $\mathbb{N}$. A partir de a_n fabricamos:

$$b_n = a_{\sigma(n)} \quad c_n = \sum_{k \in \mathcal{N}_n} a_k.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Proposición 1.21. Sean $a_{ij} \geq 0$, $\{\mathcal{N}_n\}$ una partición de $\mathbb{N}^2$, $c_n = \sum_{\mathcal{N}_n} a_{ij}$. Entonces,

$$\sum_{\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

En particular

$$\sum_{\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right\}.$$

Observación 1.8. La última identidad es un teorema de Fubini para series dobles.

Proposición 1.22. Sean $a_{ij} \geq 0$ y $\sigma : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$ una biyección. Si $b_{pq} = a_{\sigma(p,q)}$ entonces,

$$\sum_{\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{\mathbb{N}^2} b_{pq}.$$

Como es fácil comprobar se tiene en realidad una proposición más general.

Proposición 1.23. Sean $f : X \rightarrow [0, \infty]$ y una biyección $\sigma : Y \rightarrow X$. Llamando $g = f \circ \sigma$:

$$\sum_X f = \sum_Y g.$$

1.3.1. Medidas completas

Sea μ una medida en X con dominio una σ -álgebra $\mathcal{A}$. Un conjunto nulo $N \subset X$ es todo $N \in \mathcal{A}$ con $\mu(N) = 0$. Se dice que μ es *completa* si todas las partes F de un conjunto nulo arbitrario N son también elementos de $\mathcal{A}$ (por tanto, conjuntos nulos de $\mathcal{A}$).

Como veremos en la siguiente sección, las medidas inducidas por medidas exteriores μ^* siempre son completas.

Como se establece a continuación, todas las medidas pueden completarse.

Teorema 1.24. *Sea μ una medida en X con dominio una σ -álgebra $\mathcal{A}$. Se introduce la clase:*

$$\bar{\mathcal{A}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{A} \text{ y existe } N \in \mathcal{A} \text{ con } \mu(N) = 0 \text{ y } F \subset N\},$$

junto con la función de conjunto:

$$\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E).$$

Entonces $\bar{\mathcal{A}}$ es una σ -álgebra y $\bar{\mu}$ es una medida completa. Más aún $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ es la medida completa más pequeña que extiende a $(\mathcal{A}, \mu)$. Es decir, si $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ es completa y extiende a $(\mathcal{A}, \mu)$ entonces $(\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ también extiende a $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$.

1.3.2. Ejercicios

B) *Medidas.*

1. Sea μ una función de conjunto en X con dominio en una cierta clase de conjuntos $\mathcal{A}$ y valores en $\bar{\mathbb{R}}$ cumpliendo:
 - a) $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra.
 - b) μ es no negativa.
 - c) μ es completamente aditiva.

Probar que si $\mu(E) < \infty$ para algún $E \in \mathcal{A}$ entonces $\mu(\emptyset) = 0$ (es decir, μ es una medida).

2. Sea X un conjunto infinito mientras $\mathcal{A}$ es la clase de todos los subconjuntos de X . Definimos $\mu(E) = 0$ si E es finito, $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Pruébese que μ es finitamente aditiva pero no completamente aditiva.
3. Si μ es una medida sobre una σ -álgebra $\mathcal{A}$, $E, F \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

4. Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión (finita o infinita) de medidas definidas sobre la misma σ -álgebra $\mathcal{A}$. Defínase la suma $\sum_n \mu_n$ de las medidas como:

$$\left(\sum_n \mu_n \right) (E) = \sum_n \mu_n(E) \quad E \in \mathcal{A}.$$

Demuéstrese que $\sum_n \mu_n$ es una medida.

Indicación. Puede usarse la Proposición 1.21.

5. Supongamos que X está constituido por la sucesión $\{x_n\}$ mientras $\{p_n\}$ es una sucesión de números no negativos. Para $A \subset X$ defínase:

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

Probar que μ es una medida σ -finita.

6. Constrúyase un ejemplo de medida μ y una sucesión decreciente $\{E_n\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mu(E_n) = \infty$ para todo n mientras $\mu(\lim E_n) = 0$.

C) *Medidas completas.*

7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un e. m. y μ una medida finita. Pruébese que μ es completa equivale a la siguiente propiedad: $\forall A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$, $\mu(A) = \mu(B)$ se cumple que todos los conjuntos intermedios C , $A \subset C \subset B$, son medibles y comparten por tanto la misma medida que A y B .
8. Sea μ una medida completa, $\mathcal{N}$ la clase formada por todos aquellos conjuntos con medida nula. Probar que $\mathcal{N}$ es un σ -anillo.
9. Sea $(\mu, \mathcal{A})$ una medida y $(\bar{\mu}, \bar{\mathcal{A}})$ su complección. Si definimos:

$$\mathcal{A}^* = \{E \setminus N : E \in \mathcal{A}, N \subset N_1 \in \mathcal{A} \quad \mu(N_1) = 0\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}^* = \bar{\mathcal{A}}$.

1.4. Medidas Exteriores

Sea $\nu : \mathcal{D} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función de conjunto cuyo dominio $\mathcal{D}$ es una clase de subconjuntos de X y toma valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Se dice que ν es *subaditiva* si

$$\nu(E \cup F) \leq \nu(E) + \nu(F),$$

para $E, F \in \mathcal{D}$ cualesquiera con $E \cup F \in \mathcal{D}$. Se dice análogamente que ν es *finitamente subaditiva* si:

$$\nu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) \leq \sum_{k=1}^n \nu(E_k),$$

para $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{D}$ arbitrarios con $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{D}$. Finalmente, ν es *completamente subaditiva* si para $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ arbitraria en $\mathcal{D}$ con $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}$ se cumple:

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

Se dirá que ν es monótona si $E, F \in \mathcal{D}$, $E \subset F$ implican $\nu(E) \leq \nu(F)$.

Definición 1.25. Una función de conjunto $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ se denomina una medida exterior si:

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- ii) μ^* es completamente subaditiva,
- iii) μ^* es monótona: $A \subset B$ implica $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Observación 1.9. Obsérvese que el dominio de μ^* comprende *todos* los subconjuntos de X .

Ejemplo 1.10. El ejemplo más importante es la medida exterior de Lebesgue λ_N^* en $\mathbb{R}^N$. Para $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N^*(A) = \inf \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n),$$

donde el ínfimo se extiende a todas las sucesiones $\{I_n\}$ de intervalos abiertos

$$I_n = (a_n, b_n) = (a_{1n}, b_{1n}) \times \cdots \times (a_{Nn}, b_{Nn}),$$

con la propiedad de recubrir A :

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

y donde

$$\lambda(a_n, b_n) = (b_{1n} - a_{1n}) \cdots (b_{Nn} - a_{Nn}).$$

En efecto, para probar la subaditividad ii) se supone que $\sum \lambda_N^*(A_n) < \infty$ y se quiere probar que

$$\lambda_N^*(\cup A_n) \leq \sum \lambda_N^*(A_n).$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\{I_{kn}\}_{k \in \mathbb{N}}$, recubrimiento de A_n por intervalos abiertos tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_{kn}) \leq \lambda_N^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Ahora resulta que

$$\cup A_n \leq \cup_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} I_{kn},$$

luego

$$\lambda_N^*(\cup A_n) \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \lambda(I_{kn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_N^*(I_{nk}) \leq \sum \lambda_N^*(A_n) + \varepsilon.$$

Siendo esta desigualdad válida para todo ε se concluye ii).

La construcción de la medida de Lebesgue se generaliza en la siguiente sección.

Definición 1.26. Se dice que un conjunto $E \subset X$ es medible con respecto a μ^* (μ^* -medible) si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

cualquiera que sea $A \subset X$.

La utilidad de la noción de medida exterior se pone de relieve en el siguiente resultado. El de las medidas exteriores es un camino natural en la construcción de medidas en un conjunto X .

Teorema 1.27 (Carathéodory). Si μ^* es una medida exterior en X y $\mathcal{A}$ designa la clase de sus conjuntos medibles entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra.
- ii) μ^* define una medida en $\mathcal{A}$.

Demostración. En primer lugar, es fácil ver que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ y que $E^c \in \mathcal{A}$ si $E \in \mathcal{A}$.

En segundo lugar vemos que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$. Hay que ver que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \setminus E_1 \setminus E_2).$$

Empezamos con

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \setminus E_1).$$

También:

$$\mu^*(A \setminus E_1) \geq \mu^*(A \setminus E_1 \cap E_2) + \mu^*(A \setminus E_1 \setminus E_2).$$

Luego:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)) + \mu^*(A \setminus E_1 \setminus E_2),$$

y se concluye al observar que

$$\mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)).$$

Por tanto $\mathcal{A}$ es un álgebra.

Para probar que $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra tomamos una sucesión disjunta E_n en $\mathcal{A}$ y se muestra que $S := \cup E_n \in \mathcal{A}$, es decir que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \setminus S).$$

Notamos en primer lugar que $S_n = \cup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}$. Luego:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap S_n) + \mu^*(A \setminus S_n) \geq \mu^*(A \cap S_n) + \mu^*(A \setminus S). \quad (1.1)$$

Se establece ahora que:

$$\mu^*(A \cap S_n) = \sum_{k \leq n} \mu^*(A \cap E_k). \quad (1.2)$$

De aquí es claro que $\mu^*(A \cap S) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k)$ es decir que:

$$\mu^*(A \cap S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) = \lim \mu^*(A \cap S_n).$$

El resultado deseado sale tomando límites en (1.1).

Probamos (1.2) y notamos que la identidad es cierta para $n = 1, 2$. Si por inducción admitimos el caso n y usamos que E_{n+1} es medible tenemos:

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap S_{n+1}) &= \mu^*(A \cap S_{n+1} \cap E_{n+1}) + \mu^*(A \cap S_{n+1} \setminus E_{n+1}) \\ &= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*(A \cap S_n) = \sum_{k \leq n+1} \mu^*(A \cap E_k). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por tanto $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra. Que μ^* es una medida es evidente. $\square$

Observación 1.11.

- a) Si $\mu^*(E) = 0$ entonces E es medible.
- b) Si $\mu^*(E) = 0$ entonces todo $A \subset E$ también es medible. Según se ha dicho esto quiere decir que las medidas exteriores dan lugar a medidas *completas*.
- c) La σ -álgebra $\mathcal{A}$ de los conjuntos medibles con respecto a la medida exterior de Lebesgue λ_N^* se denota $\mathcal{L}_N$, sus miembros los conjuntos medible-Lebesgue y la restricción de λ_N^* a $\mathcal{L}_N$ se denomina la medida de Lebesgue (Sección 1.5.1).

1.4.1. Construcción de medidas exteriores

La siguiente sección muestra la flexibilidad de las medidas exteriores. Se verá que es relativamente sencillo construirlas. Una noción importante es la que sigue. Se dice que una clase $\mathcal{K}$ en X es de *recubrimiento numerable* si:

- i) $\emptyset \in \mathcal{K}$.
- ii) Todo $A \subset X$ se puede recubrir mediante una sucesión $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$. Es decir, existe $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ tal que:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Sea $\mathcal{K}$ una clase de recubrimiento numerable y λ una función de conjunto no negativa, con dominio $\mathcal{K}$, valores en $[0, +\infty]$ (es decir λ puede tomar el valor $+\infty$) tal que $\lambda(\emptyset) = 0$. Para $A \subset X$ se define:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) : \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.28. *La función μ^* define una medida exterior en X .*

Observación 1.12. El ejemplo fundamental de la asignatura, la medida exterior de Lebesgue, se construye por este procedimiento (Sección 1.5.1).

Cuando un par $(\mathcal{K}, \lambda)$ de este tipo se usa para construir μ^* no resulta fácil decidir qué conjuntos son medibles y cuál es su medida. Si $(\mathcal{K}, \lambda)$ es un par σ -álgebra-medida entonces (ver los Ejercicios 11-12) $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ son los conjuntos μ^* -medibles, mientras $\lambda = \mu^*$ en $\mathcal{K}$. Por tanto $(X, \mathcal{A}, \mu^*)$ es una extensión (completa) de $(X, \mathcal{K}, \mu)$.

Con una clase menos restrictiva $(\mathcal{K}, \lambda)$ se obtiene el mismo resultado.

Teorema 1.29 (Carathéodory). *Sea $(\mathcal{K}, \lambda)$ una clase de recubrimiento numerable y $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$ cumpliendo $\lambda(\emptyset) = 0$. Supongamos que $\mathcal{K}$ es un álgebra mientras:*

$$\lambda(\bigcup E_n) = \sum \lambda(E_n), \tag{1.4}$$

donde $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ es una familia de elementos disjuntos dos a dos que satisface

$$\bigcup E_n \in \mathcal{A}.$$

Sea μ^ la medida exterior generada por $(\mathcal{K}, \lambda)$. Entonces:*

- i) $\mu^*(E) = \lambda(E)$ para $E \in \mathcal{K}$.
- ii) $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es la clase de los conjuntos μ^* -medibles.

Observación 1.13. Cuando λ satisface (1.4) se la denomina una “premedida”.

Demostración. Probamos ii) y para ello tomamos $E \in \mathcal{K}$ y un $A \subset X$ cualquiera con $\mu^*(A) < \infty$ (¿por qué?). Se trata de comprobar que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\{E_n\} \subset \mathcal{K}$ con $\cup_n E_n \supset A$ y

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_n \lambda(E_n).$$

Por otra parte:

$$A \cap E \subset \cup_n (E_n \cap E) \quad A \setminus E \subset \cup_n (E_n \setminus E),$$

luego

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_n \lambda(E_n \cap E) \quad \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_n \lambda(E_n \setminus E).$$

Así

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_n \{\lambda(E_n \cap E) + \lambda(E_n \setminus E)\} = \sum_n \lambda(E_n).$$

Esto prueba la desigualdad buscada.

En cuanto a i) tomamos $E \in \mathcal{K}$. Para $\varepsilon > 0$ existe $\{E_n\} \subset \mathcal{K}$ con $\cup_n E_n \supset E$ y

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_n \lambda(E_n).$$

Sin embargo $E \subset \cup_n E_n = \cup_n F_n$ donde los $F_n \in \mathcal{K}$, $F_n \subset E_n$ y los F_n son disjuntos dos a dos. Como

$$E = \cup_n (F_n \cap E),$$

resulta

$$\lambda(E) = \sum_n \lambda(F_n \cap E) \leq \sum_n \lambda(E_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

De aquí se sigue que $\lambda(E) \leq \mu^*(E)$ mientras la desigualdad contraria es evidente. Por tanto $\mu^*(E) = \lambda(E)$. $\square$

Ejemplo 1.14. En $X = \mathbb{R}$ consideramos el álgebra $\mathcal{A} = \{\cup_{k=1}^n J_k : J_k = (a_k, b_k], J_i \cap J_l = \emptyset \text{ } i \neq l\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) : b \in \mathbb{R}\}$ (Ejercicio 13) sobre la que definimos:

$$\lambda(E) = \sum_1^n \lambda(I_k),$$

donde $\lambda((a, b]) = b - a$ y toma el valor infinito en los intervalos infinitos. La función λ constituye una premedida (lo cual no es inmedito) y genera una medida exterior μ^* cuyos conjuntos medibles $\mathcal{A}^*$ contienen a $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_1$, es decir a los borelianos de $\mathbb{R}$. Por el teorema precedente $\mu^* = \lambda$ sobre $\mathcal{A}$. No es difícil demostrar que μ^* coincide con la medida exterior de Lebesgue (Sección 1.5.1), por tanto, que $\mathcal{A}^*$ son los conjuntos medible Lebesgue.

1.4.2. Ejercicios

D) *Medidas exteriores.*

1. Defínase $\mu^*(E)$ como el número de elementos de E si tal conjunto es finito ($\mu^*(\emptyset) = 0$), $\mu^*(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ^* es una medida exterior. Determinar los conjuntos medibles.

Solución. $\mathcal{A} = \wp(X)$.

2. Defínase $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(E) = 1$ si $E \neq \emptyset$. Probar que μ^* es una medida exterior. Determinar los conjuntos medibles.

Solución. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.

3. Supóngase que X posee una cantidad no numerable de puntos. Si $\mu^*(E) = 0$ para E numerable, $\mu^*(E) = 1$ si E es no numerable. Demostrar que μ^* es una medida exterior. Determinar los conjuntos medibles.

Solución. $\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ numerable ó } E^c \text{ numerable}\}$.

4. Sea μ^* una medida exterior y $B \subset X$ un conjunto fijado. Defínase $\nu^*(A) = \mu^*(A \cap B)$. Probar que ν^* es una medida exterior determinando la relación entre los conjuntos medibles de μ^* y los de ν^* .

5. Sea $\{\mu_n^*\}$ una sucesión (finita o infinita) de medidas exteriores. Defínase la suma $\sum_n \mu_n^*$ como:

$$\left(\sum_n \mu_n^* \right) (A) = \sum_n \mu_n^*(A) \quad A \subset X.$$

Demuéstrese que $\sum_n \mu_n^*$ es una medida exterior.

Indicación. Puede usarse la Proposición 1.21.

6. Demuéstrese que si una medida exterior es finitamente aditiva entonces es una medida.
7. Se dice que una medida exterior μ^* es regular si cualquier conjunto $A \subset X$ admite una envolvente medible $G \in \mathcal{A}$, $A \subset G$ ($\mathcal{A}$ la σ -álgebra de los conjuntos μ^* medibles) con $\mu^*(A) = \mu^*(G)$. Pruébese que si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y μ^* es regular entonces:

$$\mu^*(\lim A_n) = \lim \mu^*(A_n).$$

Indicación. Sean G_n, G las envolventes de A_n, A respectivamente con $A = \cup A_n$. Cambiando G_n por $G_n \cap G$ podemos suponer que los $G_n \subset G$. Cambiando G_n por $G_n \cap G_{n+1} \cap \dots$ podemos suponer que los G_n son crecientes. Como:

$$A \subset G^* := \cup G_n \subset G,$$

 G^* es una envolvente de A . Ahora,

$$\mu^*(\lim A_n) = \mu^*(A) = \mu^*(G^*) = \lim \mu^*(G_n) = \lim \mu^*(A_n).$$

- C) *Clases recubridoras numerables* (referencia, “Sequential covering classes” en “Foundations of Modern Analysis” de A. Friedman [9]).

Si $\mathcal{K}$ es una clase de recubrimiento numerable en X y λ es una función de conjunto no negativa con dominio $\mathcal{K}$ y valores en $\mathbb{R}$, se recuerda que la medida exterior asociada a $(\mathcal{K}, \lambda)$ es:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \{A_n\} \subset \mathcal{K} \right\}. \quad (1.5)$$

8. Supongamos que $\mathcal{K}$ consta de $X, \emptyset$ y los conjuntos con un elemento. Sea $\lambda(X) = \infty$, $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(E) = 1$ si $E \neq X$, $E \neq \emptyset$. Describir μ^* .
9. Para X no numerable y $\mathcal{K}$ como en el problema anterior supongamos que $\lambda(X) = 1$, $\lambda(E) = 0$ si $E \neq X$. Describase μ^* .
10. Supongamos que $(\mathcal{K}, \lambda)$ cumple las condiciones previas que permiten construir la medida exterior μ^* como en (1.5). Probar que $\mu^*(E) \leq \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{K}$. Dése un ejemplo donde la desigualdad resulta estricta.
11. Si $\mathcal{K}$ es una σ -álgebra y λ es una medida sobre $\mathcal{K}$, donde admitimos que $\mathcal{K}$ es una clase de recubrimiento numerable. Pruébese que $\mu^*(A) = \lambda(A)$ para todo $A \in \mathcal{K}$.
Indicación. Establecer que: $\mu^*(A) = \inf\{\lambda(E) : E \in \mathcal{K}, A \subset E\}$.
12. Si el par $(\mathcal{K}, \lambda)$ constituyen una σ -álgebra (con la propiedad de recubrimiento numerable) y una medida, pruébese que todos los elementos de $\mathcal{K}$ son μ^* -medibles.

Nota. Los Ejercicios 11-12 afirman que si $(\mathcal{K}, \lambda)$ es una σ -álgebra y una medida, entonces μ^* definida por (1) y observada como medida en la clase de sus conjuntos medibles, constiuye una extensión de la medida λ .

1.5. Medidas de Lebesgue y de Lebesgue-Stieltjes

1.5.1. Medida de Lebesgue

En $\mathbb{R}^N$ se considera la clase $\mathcal{K}$ de los intervalos abiertos:

$$I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^N : a_i < x < b_i, 1 \leq N\},$$

$a = (a_1, \dots, a_N), b = (b_1, \dots, b_N)$, $a_i < b_i$ para $i \in \{1, \dots, N\}$ (incluimos $\emptyset$ en $\mathcal{K}$). La clase $\mathcal{K}$ es de recubrimiento numerable en $\mathbb{R}^N$. Se define en $\mathcal{K}$ la función de conjunto λ como $\lambda(\emptyset) = 0$ mientras:

$$\lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

La medida exterior μ^* en $\mathbb{R}^N$ asociada a $(\lambda, \mathcal{K})$ se conoce como la medida exterior de Lebesgue. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es la definida a través de μ^* . Los correspondientes conjuntos medibles se llaman conjuntos de Lebesgue.

Proposición 1.30. *Designemos por μ^* la medida exterior de Lebesgue en una dimensión. Entonces,*

- a) $\mu^*\{x\} = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
- b) Si $A \subset \mathbb{R}$ es numerable $\mu^*(A) = 0$. Por lo tanto todo conjunto numerable es medible Lebesgue.
- c) Si I es cualquiera de los intervalos (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ ó $[a, b)$ entonces $\mu^*(I) = b - a$.
- d) Para $\alpha, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, se define $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $T(x) = \alpha x + b$. Entonces $\mu^*(T(A)) = |\alpha| \mu^*(A)$. Además $A \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si $T(A)$ es medible Lebesgue.

Observación 1.15. Puede comprobarse que la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$ coincide con la medida exterior introducida en el Ejemplo 1.14. El teorema de Carathéodory dice entonces que todos los borelianos son medible-Lebesgue en $\mathbb{R}$. Usaremos otro camino para demostrar esto.

Demostración del la Proposición 1.30.

- a), b) Son inmediatos.
- c) Está claro que si I es de una clase cualquiera de los intervalos señalados se tiene que:

$$\mu^*(I) \leq b - a.$$

Estudiamos $I = [a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existen intervalos abiertos $\{I_n\}$ que recubren I y cumplen

$$\sum \lambda(I_n) \leq \mu^*(I) + \varepsilon.$$

Por compacidad un número finito de los intervalos todavía recubre I y, suprimiendo intervalos si hiciera falta, podemos suponer que estos intervalos son $I_1, \dots, I_m$ y que todos cortan a I . Así pues:

$$\sum_{n=1}^m \lambda(I_n) \leq \sum \lambda(I_n) \leq \mu^*(I) + \varepsilon. \quad (1.6)$$

Tomando c el mínimo de los extremos inferiores, d el máximo de los extremos superiores de los intervalos I_n resulta claro que:

$$\cup_{n=1}^m \lambda(I_n) = (c, d) \supset I.$$

Se tiene ahora la siguiente propiedad: si $I_1, \dots, I_m$ son intervalos abiertos cuya unión $I_1 \cup \dots \cup I_m$ es un intervalo abierto, entonces se cumple que

$$\lambda(I_1 \cup \dots \cup I_m) \leq \sum_{n=1}^m \lambda(I_n).$$

Esto se demuestra por inducción. Para dos intervalos la propiedad es evidente. El paso m a $m+1$ es así: si

$$I_1 \cup \dots \cup I_m \cup I_{m+1}$$

es un intervalo J entonces I_{m+1} ha de cortar a otro de los intervalos (de lo contrario I_{m+1} se convertiría en una componente de J). Supongamos que ese otro intervalo es I_m y que ponemos I'_m la unión de éste con aquél. Resulta:

$$\begin{aligned} \lambda(I_1 \cup \dots \cup I_m \cup I_{m+1}) &= \lambda(I_1 \cup \dots \cup I'_m) \\ &\leq \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I'_m) \leq \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_m) + \lambda(I_{m+1}), \end{aligned}$$

pues hemos usado la hipótesis de inducción y que $\lambda(I_m \cup I_{m+1}) \leq \lambda(I_m) + \lambda(I_{m+1})$.

Se concluye entonces de (1.6) que:

$$b - a \leq c - d \leq \mu^*(I) + \varepsilon.$$

Por ello $\mu^*(I) = b - a$. Que los otros intervalos comparten esa medida es ahora evidente.

d) La demostración no ofrece dificultad. □

Observación 1.16. Damos una demostración de c) que puede extenderse a $\mathbb{R}^N$. Usando la misma notación concluimos:

$$(a, b) = I'_1 \cup \dots \cup I'_m \quad I'_i = (a, b) \cap I_i,$$

en donde no tenemos en cuenta las intersecciones vacías. La unión de extremos $\{a_i, b_i\}$ de los intervalos I'_i se escribe ordenadamente $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, se forman los intervalos parciales $J_\sigma = (x_{\sigma-1}, x_\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq p$ y se cumple:

$$\lambda(a, b) = \lambda(J_1) + \dots + \lambda(J_p).$$

Afirmamos que cada $J_\sigma \subset I'_i$ para algún i . Llamamos $\Lambda = \{1, \dots, p\}$, $\Lambda_i = \{\sigma \in \Lambda : J_\sigma \subset I'_i\}$, $1 \leq i \leq m$.

Como puede ser que $\Lambda_i \cap \Lambda_s$ sea no vacío denotamos:

$$\Lambda'_1 = \Lambda_1, \quad \Lambda'_i = \Lambda_i \setminus \{\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{i-1}\}.$$

Entonces (los J_σ son disjuntos):

$$\lambda(a, b) = \sum_{\sigma \in \Lambda} \lambda(J_\sigma) = \sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \Lambda'_i} \lambda(J_\sigma) \leq \sum_{i=1}^m \lambda(I'_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda(I_i),$$

que es lo que queríamos demostrar. Nótese que hemos usado la desigualdad:

$$\sum_{\sigma \in \Lambda'_i} \lambda(J_\sigma) \leq \lambda(I'_i),$$

que está justificada porque los J_σ del primer miembro son disjuntos dos a dos.

Probamos ahora la afirmación. Ésta es inmediata para (a, x_1) y (x_{p-1}, b) . Tomemos pues J_σ :

$$a < x_{\sigma-1} < x_\sigma < b.$$

Si $x_\sigma = b_k$, como $x_{\sigma-1} \in (a_s, b_s)$ y $x_{\sigma-1}$ y x_σ son extremos consecutivos, ha de ser:

$$x_\sigma \leq b_s \quad \Rightarrow \quad (x_{\sigma-1}, x_\sigma) \subset (a_s, b_s).$$

Si $x_\sigma = a_k$ con la misma notación que antes ahora habrá de ser $x_\sigma < b_s$ y se sigue la misma conclusión.

En el caso de intervalos cerrados N -dimensionales $[a, b]$, $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ se escribe igualmente:

$$(a, b) = I'_1 \cup \dots \cup I'_m \quad I'_i = (a, b) \cap I_i,$$

se proyecta cada intervalo $I'_i = (a^i, b^i)$, $a^i = (a_k^i)$, $b^i = (b_k^i)$ en el eje j para obtener

$$(a_j, b_j) = (a_j^1, b_j^1) \cup \dots \cup (a_j^m, b_j^m).$$

Formamos la partición $\{x_0, \dots, x_{p_j}\}$ resultado de unir los extremos $\cup_s \{a_j^s, b_j^s\}$ y para $\gamma \in \{1, \dots, p_j\}$ formamos el γ_j -ésimo intervalo $I_\gamma^j = (x_{\gamma_j-1}, x_{\gamma_j})$ en la proyección j .

Denotamos $\gamma = (\gamma_i) \in \Lambda$ donde $\Lambda = \{1, \dots, p_1\} \times \dots \times \{1, \dots, p_N\}$ y construimos los intervalos parciales de la partición N -dimensional

$$I_\gamma = \prod_{j=1}^N I_\gamma^j.$$

Se tiene entonces que

$$\lambda(a, b) = \sum_{\gamma \in \Lambda} \lambda(I_\gamma).$$

Afirmamos ahora que para cada $\gamma \in \Lambda$ existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $I_\gamma \subset I'_i$. En efecto, si $x \in I_\gamma$ entonces existe i tal que $x \in I'_i$. Al proyectar en la dirección j resulta que:

$$x_j \in \pi_j(I_\gamma) = (x_{\gamma_j-1}, x_{\gamma_j}) \quad \& \quad x_j \in \pi_j(I'_i) = (a_j^i, b_j^i).$$

Sin embargo se observa ahora que x_{γ_j-1} es el mayor x_σ de los elementos de la partición que cumple $x_\sigma < x_j$ mientras x_{γ_j} es el menor $x_{\sigma'}$ de entre los de la partición que cumple $x_{\sigma'} > x_j$. Como a_j^i, b_j^i son elementos de la partición se tiene que:

$$a_j^i \leq x_{\gamma_j-1} < x_{\gamma_j} \leq b_j^i \Rightarrow (x_{\gamma_j-1}, x_{\gamma_j}) \subset (a_j^i, b_j^i).$$

Siendo esto verdad para cada j se concluye que $I_\gamma \subset I'_i$.

La idea original de esta demostración procede de Stein–Sakarchi ([17]).

Probaremos más tarde que abiertos y cerrados son siempre medible Lebesgue.

1.5.2. Medida de Lebesgue-Stieltjes

En teoría de probabilidades, las variables aleatorias inducen medidas de Borel finitas, es decir, medidas μ cuyo dominio contiene a los borelianos $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}$ que cumplen $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Se llama a

$$f(a) := \mu(-\infty, a]$$

la función de distribución de la medida. La función f es creciente, continua por la derecha, $f(a) - f(a-) = \mu\{a\}$ mientras $\mu(a, b] = f(b) - f(a)$.

Se considera ahora el proceso inverso. Se designa por $\mathcal{K}$ la clase de los intervalos abiertos (a, b) de $\mathbb{R}$ (junto con $\emptyset$). Si f es una función creciente y continua por la derecha se define:

$$\lambda(a, b) = f(b) - f(a), \tag{1.7}$$

junto con $\lambda(\emptyset) = 0$.

Definición 1.31. La medida en $\mathbb{R}$ asociada a $(\lambda, \mathcal{K})$, donde λ está definida mediante (1.7), se denomina de Lebesgue-Stieltjes.

Proposición 1.32. Sea f creciente y continua por la derecha y designemos $\mu_f^* = \mu^*$. Entonces:

- a) Para todo $x \in \mathbb{R}$: $\mu^*\{x\} = f(x+) - f(x-) = f(x) - f(x-)$ con $f(x\pm) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x \pm h)$.
- b) Si $a < b$ entonces $\mu^*[a, b] = f(b+) - f(a-) = f(b) - f(a-)$, $\mu^*(a, b) = f(b-) - f(a+) = f(b-) - f(a)$, $\mu^*[a, b) = f(b-) - f(a-)$, $\mu^*(a, b] = f(b+) - f(a+) = f(b) - f(a)$.

Como en el caso de la medida de Lebesgue, comprobaremos que abiertos y cerrados cualesquiera son medibles para μ_f^*

1.5.3. Existencia de conjuntos no medible-Lebesgue

Construimos un conjunto $F \subset [0, 1)$ no medible Lebesgue. Para ello designamos por $[x]$ clase de x módulo $\mathbb{Q}$: $[x] = x + \mathbb{Q}$. Como la aplicación $t \mapsto t + x$ es bicontinua, $[x]$ es densa y corta a $[0, 1)$. A cada clase $[x]$ asignamos un único $r_{[x]} \in [0, 1)$. Como las clases son disjuntas los $r_{[x]}$ asociados son distintos entre sí, es decir, $[x] \neq [y]$ lleva a $r_{[x]} \neq r_{[y]}$. Llamamos $F \subset [0, 1)$ al conjunto de tales $r_{[x]}$. Como primera observación resulta:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [x] = \bigcup_{r \in F} [r] = \bigcup_{r \in F} r + \mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} F + q.$$

Probamos la no medibilidad de F estableciendo que, de serlo, su medida habría de ser cero. Como $F + q$ tiene entonces medida cero llegamos a una contradicción a la vista de la última igualdad.

Que la medibilidad de F lleva a $\mu(F) = 0$ es consecuencia de que los conjuntos:

$$F + \frac{1}{k} \subset [0, 2],$$

para $k \in \mathbb{N}$, son disjuntos dos a dos. Se razona así:

$$m\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{k=2}^{m+1} F + \frac{1}{k}\right) \leq \mu([0, 2]) = 2,$$

para m arbitrario. Por tanto $\mu(F) = 0$. En conclusión, F no puede ser medible Lebesgue.

A principios del XX, Vitali probó que todo conjunto A de la recta real, con medida exterior de Lebesgue positiva contiene una parte M que no es medible Lebesgue. A efectos de tal construcción (cf. [5]) consideramos en $I = [0, 1)$ el conjunto F que acabamos de definir: $[x] \mapsto r \in [0, 1) \cap [x]$ asignando por tanto r 's distintos a clases distintas.

Introducimos en $I = [0, 1)$ la suma $\otimes$ módulo 1: $x \otimes y = x + y - \{x + y\}$ (con $\{\cdot\}$ la parte entera). Observamos las siguientes propiedades:

1. Para $q \in I$, la aplicación f_q , $x \mapsto q \otimes x$ es biyectiva con inversa $x \mapsto (1 - q) \otimes x$.
2. f_q preserva los conjuntos medible-Lebesgue.
3. f_q preserva la medida exterior.

Denotamos ahora $\{q_n\}$ a los racionales en $[0, 1)$ y ponemos $F_n = q_n \otimes F = [(q_n + F) \cap I] \cup [\{(q_n + F) \cap [1, 2)\} - 1]$. Resulta entonces que $\{F_n\}$ define una partición de $[0, 1)$. En efecto, las clases son disjuntas pues:

$$q_1 \otimes F \cap q_2 \otimes F \neq \emptyset \Rightarrow q_1 \otimes r_1 = q_2 \otimes r_2 \Rightarrow r_1 = r_2.$$

Ésto último implica que $q_1 = q_2$ y las clases son disjuntas.

Por otra parte $\cup q_n \otimes F = I$. En efecto, como antes $\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} F + q$. Si $x \in I$, entonces $x = q + f$ para algún $q \in \mathbb{Q}$. Por tanto

$$-1 < q < 1.$$

Si $q \in I = [0, 1)$, $x = q \otimes f$. Si $-1 < q < 0$ entonces

$$x + 1 = q + 1 + f \quad q + 1 \in I.$$

De ahí $x = (q + 1) \otimes f \in (q + 1) \otimes F$ y hemos terminado.

Probamos ahora que todo conjunto $E \subset [0, 1)$ con $\mu^*(E) > 0$, contiene una parte no medible $M \subset E$.

En efecto, tomamos $E = \cup_n F_n \cap E$, $E_n := F_n \cap E$, y algún E_n tiene medida positiva exterior positiva. Sin embargo no puede ser medible pues resultaría $E_n = q_n \otimes M$ con $M \subset F$ medible de medida positiva. Esto no puede ser porque $\cup_n q_n \otimes M$ sería una parte de $[0, 1)$ con medida infinita. Así, E_n es un subconjunto no medible de E .

Para concluir consideramos $A \subset \mathbb{R}$ con $\mu^*(A) > 0$. Al cortar con $\cup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1)$ algún $A_m = A \cap [m, m+1)$ tiene medida exterior positiva. Tomamos $M \subset A_m - m \subset [0, 1)$ no medible y $M + m \subset A_m$ resulta ser la parte no medible buscada.

1.5.4. Ejercicios

E) *Medida de Lebesgue.*

Se recuerda que la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ se construye mediante la clase $\mathcal{K}$ de los intervalos abiertos

$$I_{a,b} = (a_1, b_1) \times \cdots (a_N, b_N),$$

$a_i < b_i$, $i = 1, \dots, N$, y la función:

$$\lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

1. Los puntos de $\mathbb{R}^N$ son medible-Lebesgue de medida cero. Asimismo los conjuntos numerables de $\mathbb{R}^N$ son medible-Lebesgue y tienen medida cero.
2. La medida exterior de Lebesgue de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es $\mu[a, b] = b - a$. Probar que los intervalos (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ tienen la misma medida exterior.
3. Considérese la transformación $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$. Demostrar que T aplica conjuntos E medible-Lebesgue sobre conjuntos $T(E)$ medible-Lebesgue. Demuéstrese asimismo que:
 - a) Para cada E : $\mu^*(T(E)) = |\alpha| \mu^*(E)$.
 - b) E de Lebesgue si y sólo si $T(E)$ de Lebesgue.
 - c) Si E es de Lebesgue entonces $\mu(T(E)) = |\alpha| \mu(E)$.

1.6. Medidas exteriores métricas

Definición 1.33. Sea (X, d) un espacio métrico, μ^* una medida exterior en X . Se dice que μ^* es una medida exterior métrica si

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

siempre que $d(A, B) = \text{dist}(A, B) > 0$.

La definición está justificada a la luz de la siguiente propiedad, cuya demostración se deja como ejercicio (Ejercicio 3).

Proposición 1.34. Si (X, d) es un espacio métrico con una medida exterior μ^* para la que los abiertos son medibles entonces μ^* es una medida exterior métrica.

El recíproco de la propiedad es cierto. La demostración precisa un resultado preparatorio.

Lema 1.35. Sea (X, d) un espacio métrico, μ^* una medida exterior métrica en X , $G \subset X$ un abierto de medida exterior finita: $\mu^*(G) < \infty$. Si para $A \subset G$ y cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$A_n = \{x \in A : \text{dist}(x, G^c) \geq \frac{1}{n}\},$$

entonces:

$$\mu^*(A) = \lim \mu^*(A_n).$$

En un espacio métrico (X, d) la σ -álgebra generada por los abiertos (coincidente con la que generan los cerrados) se denomina la σ -álgebra $\mathcal{B}$ de los conjuntos de Borel (o borelianos).

Proposición 1.36. En un espacio métrico (X, d) en el que la medida exterior μ^* es métrica todos los abiertos son medibles y en consecuencia lo son todos los conjuntos de Borel.

Nos ocupamos de la construcción de medidas exteriores métricas. Supongamos que $\mathcal{K}$ es una clase de recubrimiento numerable con la propiedad de que cada una de las clases:

$$\mathcal{K}^n = \{K \in \mathcal{K} : d(K) = \text{diam}(K) \leq \frac{1}{n}\}$$

es también de recubrimiento numerable. Si $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty]$ podemos definir para cada n la medida exterior:

$$\mu_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \lambda(K_s) : A \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s, \{K_s\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n \right\}.$$

Como las clases $\mathcal{K}^n$ decrecen con n resulta que $\mu^* \leq \mu_n^* \leq \mu_{n+1}^*$. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.37. *En las condiciones precedentes, la función de conjunto:*

$$\mu_0^*(A) = \lim \mu_n^*(A) = \sup \mu_n^*(A),$$

define una medida exterior métrica en X .

Demostración. Que μ_0^* es una medida exterior se sigue de la Proposición 1.21 (Ejercicio 5).

Tomamos A, B con $d(A, B) = d > 0$ y $\mu_0^*(A + B) < \infty$ y se quiere ver que:

$$\mu_0^*(A + B) \geq \mu_0^*(A) + \mu_0^*(B).$$

Elegimos $\frac{1}{n_0} < d$. Fijado $\varepsilon > 0$ para todo $n \geq n_0$, $\exists \{K_s\} \subset \mathcal{K}^n$ t. q. $A + B \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$ y

$$\begin{aligned} \mu_n^*(A + B) + \varepsilon &\geq \sum_{K_s \cap (A+B) \neq \emptyset} K_s = \sum_{K_s \cap A \neq \emptyset} K_s + \sum_{K_s \cap B \neq \emptyset} K_s \\ &\geq \mu_n^*(A) + \mu_n^*(B), \end{aligned} \quad (1.8)$$

de donde

$$\mu_0^*(A + B) + \varepsilon \geq \mu_n^*(A) + \mu_n^*(B),$$

lo que implica la desigualdad deseada al hacer $n \rightarrow \infty$ y después $\varepsilon \rightarrow 0+$. $\square$

La proposición anterior indica cómo construir medidas exteriores métricas. Las medidas exteriores de Lebesgue y Lebesgue-Stieltjes se fabricaron en términos de μ^* . Por otro lado:

$$\mu^* \leq \mu_0^*.$$

Resulta por tanto de interés saber cuándo es métrica la propia medida exterior μ^* . El problema se resuelve en el siguiente resultado donde se dan condiciones asegurando que $\mu^* = \mu_0^*$.

Teorema 1.38. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{K}$ una clase de recubrimiento numerable de forma que cada subclase $\mathcal{K}^n$ posee también dicha propiedad, $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty]$ una función de conjunto.*

Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathcal{K}$, $\varepsilon > 0$ existe $\{K_s\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$ tales que:

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda(K_s) \leq \lambda(K) + \varepsilon,$$

resulta entonces que $\mu^ = \mu_0^*$. En particular, μ^* es una medida exterior métrica.*

Demostración. Ya se sabe que $\mu^* \leq \mu_0^*$. Tomamos $A \subset X$ con $\mu^*(A) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\{K_r\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ tal que:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda(K_r) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, para cada r existe $\{K_{rs}\}_{s \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}^n$ tal que $K_r \subset \cup_{s=1}^{\infty} K_{rs}$ y

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda(K_{rs}) \leq \lambda(K_r) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2^r}.$$

Como

$$A \subset \cup_{(r,s)} K_{rs},$$

entonces

$$\mu_n^*(A) \leq \sum_r \sum_s \lambda(K_{rs}) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \lambda(K_r) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^*(A) + \varepsilon,$$

de donde se deduce, al hacer $n \rightarrow \infty$ y después, $\varepsilon \rightarrow 0$ que $\mu_0^*(A) \leq \mu^*(A)$. $\square$

En la sección de ejercicios se establece el siguiente resultado.

Teorema 1.39. *La medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es una medida exterior métrica y por tanto los borelianos son medible-Lebesgue. La medida exterior de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$ también define una medida exterior métrica.*

Demostración. Consideramos el caso de la medida de Lebesgue y $N = 1$. Tomamos un intervalo (a, b) y para aplicar el Teorema 1.38 lo dividimos en M partes $x_0 = a, \dots, x_M = b$ de longitud $\Delta x_i = \frac{b-a}{M}$ y observamos que

$$\lambda(a, b) = \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_M),$$

con $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ pero

$$I_1 \cup \dots \cup I_M = (a, b) \setminus \{x_1, \dots, x_{M-1}\}.$$

Para recubrir (a, b) cambiamos I_i por $I'_i = (x_{i-1}, x_i + \frac{\eta}{M})$. Ahora los I'_i recubren (a, b) con

$$\lambda(I'_1) + \dots + \lambda(I'_M) = \lambda(a, b) + \eta$$

Si nos damos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ basta tomar $\frac{b-a}{M} + \frac{\eta}{M} < \frac{1}{n}$ y $\eta = \varepsilon$.

Si por otra parte usamos el hecho de que f es continua por la derecha, la misma idea sirve para demostrar que la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes (Definición 1.31) es una medida exterior métrica.

Que la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es una medida exterior métrica en el caso $n \geq 2$ se propone como ejercicio (véanse los Ejercicios 6, 7 y 8). $\square$

1.7. El conjunto ternario de Cantor

Que los conjuntos numerables son de medida nula es algo que ha quedado claro. Se construye ahora un conjunto nulo que no es numerable.

Consideramos un intervalo $I = [a, b]$. Se define (cf. [13]):

$$I^* = \left[a, a + \frac{l}{3} \right] \cup \left[a + \frac{2}{3}l, b \right] \quad l = b - a,$$

es decir, el resultado de quitar a I el tercio medio. Partiendo de $I = [0, 1]$, definimos $A_1 = I^*, \dots, A_{n+1} = A_n^*$ (la operación “*” aplicada a una colección de intervalos actúa separadamente sobre cada uno de ellos). Resulta así que A_n está formado por 2^n intervalos disjuntos de longitud $1/3^n$ cumpliendo que:

$$A_{n+1} \subset A_n.$$

Se define el conjunto de Cantor C como:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

C es cerrado y no vacío. De hecho, la generación n -ésima de intervalos es

$$A_n = [a_1^n, b_1^n] \cup \dots \cup [a_{2^n}^n, b_{2^n}^n] = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k^n, b_k^n] = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_k^n,$$

donde $I_k^n = [a_k^n, b_k^n]$. Resulta que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} \{a_k^n, b_k^n\} \subset C,$$

pues los extremos de la generación n se convierten en extremos de la generación siguiente. De hecho, el intervalo I_k^n da lugar a los dos intervalos I_{2k-1}^{n+1} y I_{2k}^{n+1} de forma que

$$a_{2k-1}^{n+1} = a_k^n, \quad a_{2k}^{n+1} = a_k^n + \frac{2}{3^{n+1}}$$

mientras

$$b_{2k-1}^{n+1} = a_k^n + \frac{1}{3^{n+1}}, \quad b_{2k}^{n+1} = b_k^n.$$

Por otro lado en la generación n , la sucesión de los 2^n extremos a_k^n es exactamente:

$$a_k^n = \sum_{l=0}^n \frac{x_l}{3^l} \quad x_l \in \{0, 2\}.$$

Esto se prueba por inducción. La secuencia ordenada de tales extremos se representa como la sucesión de dígitos que en base 3 tienen la forma $0.x_1 \dots x_n$ con los $x_s \in \{0, 2\}$.

Una primera conclusión es que todos los números de $[0, 1]$ que en base tres se representan con 0's y 2's:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \quad x_k \in \{0, 2\} \quad (1)$$

pertenecen al conjunto de Cantor. Recíprocamente, si $x \in C$, $x \in A_n$ para todo n ,

$$0 \leq x - a_k^n \leq \frac{1}{3^n}, \quad k = k(n).$$

Esto prueba que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k(n)}^n.$$

Por otro lado $x \in I_k^n \cap I_{k'}^{n+1}$ donde $k = k(n)$, $k' = k(n+1)$. Como todo intervalo de la generación $n+1$ sólo corta a uno de la anterior entonces $I_{k'}^{n+1} \subset I_k^n$.

De ahí:

$$a_{k(n+1)}^{n+1} = \begin{cases} a_{k(n)}^n \\ \text{ó} \\ a_{k(n)}^n + \frac{2}{3^{n+1}}. \end{cases}$$

En cualquiera de los dos casos $a_{k(n+1)}^{n+1}$ y $a_{k(n)}^n$ comparten las n primeras cifras. Llamamos ahora y_n a la cifra n -ésima de $a_{k(n)}^n$ y ponemos

$$y = \sum_n \frac{y_n}{3^n}.$$

Se tiene:

$$x - y = (x - a_{k(n)}^n) - (y - a_{k(n)}^n).$$

Resulta evidente que éstas dos últimas cantidades tienden a cero.

Teorema 1.40. *El conjunto de Cantor:*

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} : x_k \in \{0, 2\}\}.$$

Por otra parte, la medida de Lebesgue de C es cero.

Demostración. Como $C \subset A_n$ para todo n ,

$$\mu(C) \leq \mu(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. □

El conjunto de Cantor C es no numerable. Esto se sigue de la siguiente propiedad.

Proposición 1.41. *El conjunto C es biyectivo a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Se define

$$f : \begin{array}{ccc} \{0, 2\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & C \\ (x_i) & \longmapsto & \sum_i \frac{x_i}{3} \end{array}.$$

Basta probar que f es inyectiva. A tal efecto suponemos:

$$0.x_1 \dots x_{n-1}x_n \dots = 0.y_1 \dots y_{n-1}y_n \dots$$

y admitimos que la primera discrepancia de cifras está en el lugar n en donde $x_n < y_n$, luego $x_n = 0$, $y_n = 2$. Manipulando la identidad llegamos a

$$0.x_n x_{n+1} \dots \leq 0,0 \widehat{2} = 0,1 < 0,2 \leq 0.y_n y_{n+1} \dots,$$

que por hipótesis no es posible. $\square$

Observaciones 1.17.

- a) Del teorema se deduce que el cardinal de C es c el cardinal de $\mathbb{R}$.
- b) Como C tiene medida cero todos sus subconjuntos son medible-Lebesgue. El cardinal de todas las partes de C es 2^c que es un cardinal estrictamente mayor que la potencia del continuo c . Esto dice que hay una enorme cantidad de conjuntos medibles.
- c) Se puede probar que el cardinal de la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es c (ver [8]). Debe haber entonces (muchos) conjuntos medible-Lebesgue que no son borelianos.

1.8. Medidas de Hausdorff

En $\mathbb{R}^N$ y con $s > 0$ se define la medida exterior:

$$\mu_{s,\delta}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d(E_n)^s : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_{\delta} \right\},$$

donde $\mathcal{K}_{\delta}$ son los conjuntos de $\mathbb{R}^N$ de diámetro menor o igual que δ . Las $\mu_{s,\delta}^*$ crecen cuando $\delta \rightarrow 0+$ y, según sabemos:

$$\mu_s^*(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mu_{s,\delta}^*(A) = \sup_{\delta \rightarrow 0} \mu_{s,\delta}^*(A),$$

es una medida exterior métrica. La medida asociada se llama la medida de Hausdorff de orden s . Con un poco de cuidado se comprueba que los E_n de la definición se pueden cambiar por *abiertos* de diámetro menor o igual que δ y se obtiene la misma medida exterior. La idea es que si $B(A, \varepsilon)$ denota la bola con centro A y radio ε entonces $\text{diam}(B(A, \varepsilon)) \rightarrow \text{diam}(A)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$. Sin embargo, en $\mathbb{R}$ podemos incluso cambiar abierto por *intervalo abierto*. Esto se sigue de que todo abierto se puede introducir en un intervalo abierto del mismo diámetro.

Por tanto, en una dimensión:

$$\mu_{s,\delta}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)^s : A \subset \bigcup_n (a_n, b_n), b_n - a_n < \delta \right\},$$

definiéndose μ_s^* como arriba. Se observa que μ_s^* es la medida de Lebesgue cuando $s = 1$.

En el caso $s = 0$ es costumbre definir la medida de Hausdorff de orden cero μ_0^* como la medida de contar, e. d., el cardinal si el conjunto es finito, infinito en caso contrario.

Proposición 1.42. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ y supongamos que $0 \leq s < t$.*

- a) *Si $0 \leq \mu_s^*(E) < \infty$ entonces $\mu_t^*(E) = 0 \ \forall t > s$.*
- b) *Si $0 < \mu_t^*(E) \leq \infty$ entonces $\mu_s^*(E) = \infty \ \forall s : 0 \leq s < t$.*

Demostración. Debe notarse que si $\mu_0(E)$ es finito, E es finito y $\mu_s^*(E) = 0$, $\forall s > 0$. Por otro lado, si $\mu_s^*(E) > 0$ entonces E es infinito y $\mu_0^*(E) = \infty$.

Probamos a). Para un recubrimiento $\{E_n\}$ de E con $d(E_n) < \varepsilon \ \forall n$, se tiene:

$$\sum d(E_n)^t \leq \varepsilon^{t-s} \sum d(E_n)^s \quad \Rightarrow \quad \mu_{t,\varepsilon}^*(E) \leq \varepsilon^{t-s} \mu_{s,\varepsilon}^*(E).$$

Como $\mu_{s,\varepsilon}^*(E) = O(1)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$ obtenemos el resultado. En el caso b),

$$\frac{1}{\varepsilon^{t-s}} \sum d(E_n)^t \leq \sum d(E_n)^s \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon^{t-s}} \mu_{t,\varepsilon}^*(E) \leq \mu_{s,\varepsilon}^*(E),$$

donde no queda excluido que $\mu_{t,\varepsilon}^*(E) = \infty$. Al ser $\mu_t^*(E) > 0$ se obtiene $\mu_s^*(E) = \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$. $\square$

Proposición 1.43. *Si $E \subset \mathbb{R}^N$ entonces $\mu_s^*(E) = 0$ para todo $s > N$*

Demostración. Observamos que existe C_N sólo dependiente de N tal que

$$d(Q)^N \leq C_N \text{vol}(Q)$$

para todo cubo abierto.

Se tiene que para todo $E \subset \mathbb{R}^N$

$$\mu_{N,\varepsilon}^*(E) \leq \lambda_{N,\varepsilon}^*(E)$$

puesto que los cubos son sólo una clase especial de abiertos. Luego:

$$\mu_N^*(E) \leq C_N \lambda_N^*(E),$$

donde λ_N^* es la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Ponemos $E = \cup E_n$ donde los E_n tienen medida exterior λ_N^* finita y resulta que $\mu_s^*(E_n) = 0$ para $s > N$ de lo que

$$\mu_s^*(E) \leq \sum \mu_s^*(E_n) = 0.$$

$\square$

Teorema 1.44. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$. Entonces*

$$s_H(E) := \inf\{s > 0 : \mu_s^*(E) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mu_s^*(E) = \infty\} \leq N.$$

Observación 1.18. El número $s_H(E)$ de la proposición se denomina la dimensión de Hausdorff de E .

Demostración del teorema. Llamamos s_1 y s_2 a los números que definen s_H . Claramente $s_1 \leq N$ junto con $s_1 \geq s_2$ pues si s, s' son números implicados en sendos conjuntos ha de ser $s \geq s'$. Si $s_1 = 0$, $\mu_0^*(E)$ puede ser tanto finito como infinito. En el primer caso el segundo conjunto es vacío y en el segundo caso $\{0\}$, ésto último siendo coherente con la afirmación del teorema pues $s_2 = 0$.

Si $s_1 > 0$ ha de ser $\mu_s^*(E) = \infty$ para todo $0 \leq s < s_1$ (caso contrario se contradiría la definición de s_1). Luego $s_1 = s_2$. □

Proposición 1.45. Si $G \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ resulta que $s_H(G) = N$. En particular $s_H(\mathbb{R}^N) = N$ y, como se ha visto, las partes de $\mathbb{R}^N$ tienen dimensión de Hausdorff no superior a N .

Proposición 1.46. El conjunto ternario de Cantor C tiene dimensión de Hausdorff $s_H(C) = \log 2 / \log 3$. Además, para tal valor de s se tiene que $\mu_s(C) = 1$.

1.8.1. Ejercicios

F) *Medidas exteriores métricas.*

1. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $A \subset X$. Demostrar que si A es cerrado con $x \notin A$ entonces $\rho(x, A) > 0$.
2. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $A \subset X$, $x, y \in X$. Si $\rho(x, A) > \alpha > \beta > \rho(y, A)$ pruébese que $\rho(x, y) > \alpha - \beta$.
3. Demuéstrese que si (X, ρ) es un espacio métrico dotado de una medida exterior μ^* para la que los abiertos son conjuntos medibles, entonces μ^* es una medida exterior métrica.
4. Sea μ una medida cuyo dominio es la σ -álgebra $\mathcal{A}$. Para $E, F \in \mathcal{A}$ se define:

$$\rho(E, F) = \mu((E \setminus F) \cup (F \setminus E)).$$

Pruébese que ρ satisface la desigualdad triangular en $\mathcal{A}$, es decir:

$$\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G),$$

cualesquiera que sean $E, F, G \in \mathcal{A}$.

5. Sea (X, ρ) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X . Para $E \subset X$ definamos $\mu^*(E)$ como el número de puntos x_n que pertenecen a $\bar{E}$. Pruébese que μ^* es una medida exterior métrica.

G) *La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$: propiedades más finas.*

6. Sea $\mathcal{K}$ la clase de los intervalos abiertos $I_{a,b} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)$ en $\mathbb{R}^N$ con

$$\lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

Para $a_i \in \mathbb{R}$, $\delta_i > 0$, $r_i \in \mathbb{N}$ fijamos $b_i = a_i + r_i \delta_i$,

$$I_{a_i, b_i, \gamma_i} = (a_i + (\gamma_i - 1)\delta_i, a_i + \gamma_i \delta_i) \quad \gamma_i = 1, \dots, r_i.$$

Introducimos $a = (a_1, \dots, a_N)$, $b = (b_1, \dots, b_N)$ mientras que para $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \{1, \dots, r_1\} \times \cdots \times \{1, \dots, r_N\}$ definimos:

$$I_{a,b,\gamma} = \prod_{i=1}^N I_{a_i, b_i, \gamma_i}.$$

Probar que:

$$\lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma} \lambda(I_{a,b,\gamma}).$$

7. Sean $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}^N$, $a_i < b_i$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ mientras $I_{a-\varepsilon, b+\varepsilon} = \prod_{i=1}^N (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon)$. Demostrar que $\lambda(I_{a-\varepsilon, b+\varepsilon}) - \lambda(I_{a,b}) < c\varepsilon$ con $c = O(1)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Nota. Resultará de mucha utilidad conocer cómo depende c de ε y de las diferencias $b_i - a_i$ (los lados de $I_{a,b}$).

8. El objetivo del ejercicio es probar que *los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^N$ son conjuntos de Lebesgue* para lo cual demostraremos que la medida exterior de Lebesgue es métrica. Pruébese a tal fin que dados un intervalo $I_{a,b}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ arbitrarios, existen intervalos abiertos $I_1, \dots, I_M$, con

$$I_{a,b} \subset I_1 \cup \cdots \cup I_M,$$

con $d(I_i) < 1/n$ para cada i ($d(A)$ es el diámetro de A), de suerte que:

$$\lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_M) \leq \lambda(I_{a,b}) + \varepsilon.$$

Indicación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fraccíonese $I_{a,b}$ usando hiperplanos $x_i = a_i + \gamma_i \delta_i$, con los $\delta_i > 0$ pequeños como para que $d(I_{a,b,\gamma}) < 1/n$ para cada γ . Usar después que:

$$\lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma} \lambda(I_{a,b,\gamma}).$$

9. Supóngase que $\{I_{c_k, e_k}\}_{k=1}^m$ es un recubrimiento por intervalos abiertos de un intervalo cerrado $\bar{I}_{a,b}$. Para $r \in \mathbb{N}$ arbitrario tomemos $\delta_i = b_i - a_i/r$. Pruébese la existencia de un recubrimiento $\{I_{\alpha_k, \beta_k}\}_{k=1}^m$ de $\bar{I}_{a,b}$ por intervalos abiertos, $\alpha_k = (\alpha_{ki})$, $\beta_k = (\beta_{ki})$, con:

$$\alpha_{ki} = a_i + \gamma'_i \delta_i \quad \beta_{ki} = a_i + \gamma''_i \delta_i,$$

$$\gamma'_i, \gamma''_i \in \mathbb{Z},$$

$$I_{c_k, e_k} \subset I_{\alpha_k, \beta_k},$$

y

$$\lambda(I_{\alpha_k, \beta_k}) \leq \lambda(I_{c_k, e_k}) + \frac{C}{r},$$

donde C no depende de r .

Indicación. Para i fijado, tómesese α_{ki} el máximo $a_i + \gamma\delta_i \leq c_{i,k}$, γ entero, $\beta_{k,i}$ el mínimo $a_i + \gamma'\delta_i \geq e_{k,i}$, γ' entero.

10. Sea $\bar{I}_{a,b}$ un intervalo cerrado acotado. Pruébese que:

$$\mu^*(\bar{I}_{a,b}) = \mu(\bar{I}_{a,b}) = \lambda(\bar{I}_{a,b}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Indicación. Para una desigualdad usar que:

$$\mu^*(\bar{I}_{a,b}) \leq \mu^*(I_{a-\varepsilon, b+\varepsilon}) \leq \lambda(I_{a-\varepsilon, b+\varepsilon}) \quad \varepsilon > 0,$$

a fin de concluir:

$$\mu^*(\bar{I}_{a,b}) \leq \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Para la desigualdad contraria pruébese que si $E_1, \dots, E_m$ son intervalos abiertos cumpliendo:

$$\bar{I}_{a,b} \subset \cup_{k=1}^m E_k$$

entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se satisface que:

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \sum_{k=1}^m \lambda(E_k) + \varepsilon. \quad (1)$$

Tal estimación y la arbitrariedad de ε y los E_k lleva a que:

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \leq \mu^*(\bar{I}_{a,b}).$$

A los efectos de probar (1) usamos el problema 48, construimos $I_{\alpha_k, \beta_k} \supset E_k$, $k = 1, \dots, m$, con $\alpha_{ik} = a_i + \gamma_i\delta_i$, $\beta_{ik} = a_i + \gamma'_i\delta_i$, $\gamma_i, \gamma'_i \in \mathbb{Z}$, $\delta_i = (b_i - a_i)/r$, con $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $Cm/r < \varepsilon$, con C la constante del problema 48. Tenemos entonces:

$$\lambda(I_{\alpha_k, \beta_k}) = \sum_{\gamma \in \Lambda_k} \lambda(I_{a,b,\gamma}), \quad \lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma \in \Lambda} \lambda(I_{a,b,\gamma}),$$

$\Lambda = \{1, \dots, r\}^k$, $\Lambda_k \subset \mathbb{Z}^k$, junto con:

$$I_{a,b} \subset \cup_{k=1}^m I_{\alpha_k, \beta_k},$$

de donde:

$$\Lambda \subset \bigcup_{k=1}^m \Lambda_k.$$

Se concluye de ahí que

$$\lambda(I_{a,b}) = \sum_{\gamma \in \Lambda} \lambda(I_{a,b,\gamma}) \leq \sum_{k=1}^m \sum_{\gamma \in \Lambda_k} \lambda(I_{a,b,\gamma}) = \sum_{k=1}^m \lambda(I_{\alpha_k, \beta_k}) \leq \sum_{k=1}^m \lambda(E_k) + \varepsilon.$$

11. Sea $I_{a,b}$ un intervalo abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Probar que:

$$\mu(I_{a,b}) = \mu^*(I_{a,b}) = \mu^*(\bar{I}_{a,b}) = \lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

12. Si F es medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ con $\mu(F) < \infty$ probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $G \supset F$ abierto tal que $\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon$.
13. Sea F un conjunto medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ con $\mu(F) < \infty$ probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \supset F$ tal que $\mu(F) - \varepsilon < \mu(K)$.

Indicación. Conviene empezar suponiendo que F está acotado, e. d. $F \subset \bar{B}$ donde B es una bola de $\mathbb{R}^N$. Si F^c es el complementario de F en $\bar{B}$ pruébese entonces que $F = \lim G_n \cap \bar{B}$ con $\mu(F) = \lim \mu(G_n \cap \bar{B})$ donde G_n es una sucesión de abiertos. Extraíase de ahí la conclusión.

14. Si F es medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ pruébese la existencia de un boreliano $E \supset F$ que cumple $\mu(E \setminus F) = 0$. Conclusión: todo conjunto de Lebesgue contiene un conjunto de Borel del que difiere en un conjunto de medida nula (en particular tienen la misma medida).
- El Ejercicio 14 afirma que la σ -álgebra de los conjuntos medible-Lebesgue es la completación –en el sentido del Capítulo I– de la σ -álgebra de los conjuntos de Borel.
15. Probar que una recta de $\mathbb{R}^N$ ($n \geq 2$) tiene medida de Lebesgue cero. Más generalmente, probar que un subespacio k dimensional de $\mathbb{R}^N$ con $k \leq N - 1$ tiene medida cero.

Indicación La propiedad es consecuencia del Ejercicio 11 si los planos son paralelos a los hiperplanos coordenados $x_i = 0$ (ver también el Ejercicio 17).

16. Probar que el la esfera $\partial B(0, R)$ tiene medida cero ($B(0, R) = \{|x| < R\}$).

Indicación. Probar primero que $\mu(B(0, R)) = R^N \mu(B(0, 1))$ (ver Ejercicio 17).

17. Sea $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la transformación afín $Tx = Ax + k$, A matriz $N \times N$ invertible $k \in \mathbb{R}^N$. Se demostrará más tarde que $\mu(T(I_{a,b})) = |\det A| \lambda(I_{a,b})$. Pruébese que las afirmaciones del Ejercicio 3 se extienden al caso de $\mathbb{R}^n$ para la aplicación T .

18. Para una función creciente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua por la derecha, la medida exterior μ_f^* de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$ se define a través de λ definida en la clase de los intervalos abiertos como:

$$\lambda(a, b) = f(b) - f(a).$$

Pruébese que:

$$\mu_f^*(a, b] = f(b) - f(a).$$

Asimismo:

$$\mu_f^*[a, b] = f(b) - f(a-).$$

19. Pruébese que la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes es una medida exterior métrica.
20. Sea $f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Probar que:

$$\mu_f\{(-1, 0)\} < f(0) - f(-1),$$

donde μ_f es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a f .

1.9. Medidas con signo: cargas

Una función de conjunto μ con dominio en una σ -álgebra $\mathcal{A}$ se dice una medida con signo si:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- b) μ toma valores o bien en $[-\infty, \infty)$ o bien en $(-\infty, +\infty]$, es decir μ toma valores en $\mathbb{R}$, tanto positivos como negativos. Sin embargo, si μ alcanza el valor $-\infty$ (respectivamente, ∞) ya no puede valer ∞ (respectivamente, $-\infty$) en ningún otro conjunto de $\mathcal{A}$.
- c) μ es completamente aditiva.

El mejor ejemplo de medida con signo es:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2,$$

donde μ_1, μ_2 son medidas una de ellas finita.

Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se dice positivo si $\mu(B) \geq 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$. Equivalentemente, si $\mu(A \cap C) \geq 0$ para todo $C \in \mathcal{A}$. Los conjuntos negativos se definen de manera análoga.

Proposición 1.47. *Si $A \in \mathcal{A}$ tiene medida finita $|\mu(A)| < \infty$ todo $B \subset A$ medible tiene también medida finita: $|\mu(B)| < \infty$.*

Teorema 1.48 (Teorema de descomposición de Hahn). *Si μ es una medida con signo existe una partición de X en dos conjuntos medibles $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, donde A es positivo y B negativo.*

Corolario 1.49 (descomposición de Jordan de una medida con signo). *Si μ es una medida con signo existen medidas μ^+, μ^- , una de ellas finita, tales que:*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Demostración. Si A, B es una descomposición de Hahn basta tomar:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B).$$

□

Nótese que aunque caben infinitas descomposiciones de Hahn en X las medidas μ^+, μ^- no dependen de tales descomposiciones. Esto se deja como ejercicio. Las medidas μ^+, μ^- se llaman, respectivamente, las variaciones positiva y negativa de μ . La medida $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ se conoce como la variación total de μ .

1.9.1. Ejercicios

H) *Medidas con signo.*

1. Sea $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, μ una medida con signo tal que: $|\mu(A_n)| < \infty$ para cada n . Demuéstre que μ^+, μ^- son σ -finitas.
2. Sea μ una medida con signo mientras $\{E_n\}$ designa una sucesión monótona de conjuntos medibles (en la que se supone $|\mu(E_1)| < \infty$ en caso de la sucesión sea decreciente). Pruébese que:

$$\mu(\lim E_n) = \lim \mu(E_n).$$

3. Dese un ejemplo de medida con signo para la que la descomposición de Hahn no sea única.
4. Sean $\mu^\pm$ los elementos de la descomposición de Jordan de una medida con signo μ asociada a una descomposición de Hahn $X = A \cup B$, a saber:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B).$$

Pruébese que las medidas $\mu^\pm$ no dependen de la descomposición de Hahn. Es decir si $X = A' \cup B'$ define una nueva descomposición, entonces:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A') \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap B').$$

5. Una medida compleja es por definición una función de conjunto $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, es decir con valores finitos, tal que i) $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra, ii) μ es completamente aditiva, iii) $\mu(\emptyset) = 0$. Pruébese que μ es una medida compleja con dominio en $\mathcal{A}$ si y sólo si existen medidas μ_i , $1 \leq i \leq 4$, tales que:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4).$$

1.10. Soluciones a los Ejercicios del Capítulo 1

C) *Medidas completas.*

- Solución 9. Si $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra y $\mathcal{A}^c = \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$ entonces $\mathcal{A}^c = \mathcal{A}$. Nótese que $\mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}}^c$.

D) *Medidas exteriores*

- Solución 8. $\mu^*(A)$ es el número de elementos de A si A es finito, $\mu^*(A) = \infty$ si A es infinito.
- Solución 9. $\mu^*(A) = 0$ si A es finito o numerable, $\mu^*(A) = 1$ si A es no numerable.
- Solución 10. Para el ejemplo basta tomar X numerable, $\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\} \cup \{\emptyset, X\}$, $\lambda(X) = 1$, $\lambda = 0$ en otro caso. $\mu^*(X) = 0$.

G) Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

- Solución 15. Basta probar que si $V \subset \mathbb{R}^N$ es $N - 1$ -dimensional entonces $\mu(V) = 0$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e_N \notin V$.

Tomamos el cubo unidad $\bar{I} = [0, 1]^N$, $\bar{I}_\gamma = \bar{I} + \gamma$ con $\gamma \in \mathbb{Z}^N$ y resulta que:

$$V = \cup_\gamma V_\gamma,$$

donde $V_\gamma = V \cap \bar{I}_\gamma$. Demostramos que $\mu(V_\gamma) = 0$. En efecto:

$$V_\gamma \subset \bar{I}_{\gamma, \varepsilon},$$

donde si $J = I_{a, b}$, $J_\varepsilon = I_{a - (\varepsilon, \dots, \varepsilon), b + (\varepsilon, \dots, \varepsilon)}$. Resulta obvio que:

$$V_m := V_\gamma + \frac{1}{m} e_n \subset \bar{I}_{\gamma, \varepsilon},$$

para todo $m \geq m_0$, siendo los V_m disjuntos dos a dos. Como $\mu(V_m) = \mu(V_k) = \mu(V_\gamma)$ para $k \neq m$ esto implica que $\mu(V_\gamma) = 0$.

Capítulo 2

Funciones Medibles. Integral de Lebesgue

2.1. Funciones medibles

Se recuerda que un espacio de medida está definido por una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en donde μ es una medida en X con dominio $\mathcal{A}$. Siempre que no se advierta lo contrario X designará un espacio de medida.

Se introduce a continuación la clase de funciones que se va a integrar.

Definición 2.1. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice medible si $f^{-1}(G)$ es medible cualquiera que sea el abierto $G \subset \mathbb{R}$.

Más generalmente, se dice que una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}^m$ es medible si para todo abierto $G \subset \mathbb{C}^m$ se cumple que $f^{-1}(G)$.

Observación 2.1. Si $f : X \rightarrow Y$ donde Y es un espacio de Banach separable, f se dice medible si $f^{-1}(G)$ es medible cuando G es cualquier abierto de Y . Más adelante se aclara el por qué de la condición de separabilidad de Y (ver la Observación 2.5).

La siguiente propiedad resulta de suma utilidad.

Propiedad 2.2. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible y $f : X \rightarrow Y$ donde Y es meramente un conjunto. La clase

$$\mathcal{A}_f := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

es una σ -álgebra en Y (la σ -álgebra pullback de f).

Observaciones 2.2.

- a) Se sabe que cada una de las clases $\{\{a, b\}\}$ de intervalos de la forma: $\{a, b\} = (-\infty, b)$, $\{a, b\} = (a, +\infty)$, $\{a, b\} = (-\infty, b]$, $\{a, b\} = [a, +\infty)$, $\{a, b\} = (a, b)$, $\{a, b\} = [a, b)$, $\{a, b\} = (a, b]$ o $\{a, b\} = [a, b]$ genera, separadamente la σ -álgebra

de los borelianos de $\mathbb{R}$. Por tanto, si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y para una clase cualquiera de intervalos se tiene que $f^{-1}(I)$ es medible, donde I es un intervalo arbitrario de la clase, entonces f es medible. Más aún, para todo conjunto boreliano B se cumple que $f^{-1}(B)$ es medible.

b) Si Y es un espacio de Banach, $B \subset Y$ un boreliano y $f : X \rightarrow Y$ es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible.

La noción de función medible se extiende al caso de funciones con valores en $[-\infty, \infty]$.

Definición 2.3. Una función $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es medible si

i) $f^{-1}(\{-\infty\})$ y $f^{-1}(\{\infty\})$ son conjuntos medibles.

ii) $f^{-1}(G)$ es medible cualquiera que sea el abierto $G \subset \mathbb{R}$.

Una consecuencia de las observaciones anteriores es la siguiente.

Proposición 2.4. Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ una función en donde X es un espacio medible. Entonces f es medible si y sólo si:

a) $f^{-1}(\{-\infty\})$ y $f^{-1}(\{\infty\})$ son conjuntos medibles.

b) $f^{-1}(-\infty, c)$ es medible para cada $c \in \mathbb{R}$.

Observación 2.3. Si X_0 es un subconjunto medible de X , todas las nociones de función medible introducidas hasta el momento se extienden a funciones con dominio X_0 . Es decir, funciones $f : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $f : X_0 \rightarrow \mathbb{C}^m$, $f : X_0 \rightarrow Y$ ó $f : X_0 \rightarrow [-\infty, \infty]$. En todos los casos se requiere que para todo abierto G , $f^{-1}(G)$ sea una parte medible de X_0 (añadiendo en el último caso que $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(\infty)$ sean medibles en X_0). En realidad, estas definiciones están recogidas en las anteriores si observamos a X_0 como el espacio de medida $(X_0, \mathcal{A}_{X_0}, \mu_0)$ donde $\mathcal{A}_{X_0} = \{E \cap X_0 : E \in \mathcal{A}\}$ y $\mu_0 = \mu|_{\mathcal{A}_{X_0}}$.

Uno de los ejemplos más sencillos de función medible es la función característica χ_A de un conjunto $A \subset X$ ($\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$). χ_A es medible siempre que A lo sea.

Proposición 2.5. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales medibles en un espacio medible X , $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Entonces las funciones reales

$$f(x) = \underline{\lim} f_n(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x),$$

y

$$g(x) = \overline{\lim} f_n(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k(x),$$

son medibles. En particular, el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es también una función medible.

Demostración. La idea principal es probar que el supremo $h(x) = \sup f_n(x)$ de funciones medibles es medible. Nótese que $h^{-1}(\{-\infty\}) = \cap_n f_n^{-1}(\{-\infty\})$, que $h^{-1}(\{\infty\}) = \cap_N \cup_n f_n^{-1}([N, \infty])$, mientras $h^{-1}((-\infty, c]) = \cap f_n^{-1}((-\infty, c])$. $\square$

Proposición 2.6. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces $g \circ f$ es medible. Si $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ entonces $1/g$ es medible.

Proposición 2.7. Una función compleja $f = u + iv$ es medible si y sólo si lo son sus partes real e imaginaria $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Este resultado es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.8. Se considera $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$, donde X es un espacio medible. Entonces, f es medible si y sólo si es medible cada una de las componentes f_i .

Proposición 2.9. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces, el conjunto $\{x : f(x) < g(x)\}$ es medible.

Demostración. Se puede escribir

$$\{x : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(-\infty, q) \cap g^{-1}(q, \infty),$$

de donde se deduce la afirmación. $\square$

Proposición 2.10. Sean $f, g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ funciones medibles tales que los conjuntos $f^{-1}(\{\mp\infty\}) \cap g^{-1}(\{\pm\infty\})$ son vacíos, entonces $f + g$ es medible. Análogamente, $f - g$ es medible si f y $-g$ cumplen las condiciones precedentes.

Proposición 2.11. Sean $f, g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ funciones medibles tales que $f^{-1}(\{\pm\infty\}) \cap g^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{\pm\infty\})$ son vacíos. Entonces fg es medible.

Demostración. Poniendo $Y = X \setminus \{|f(x)| + |g(x)| = \infty\}$ resulta de la propiedad de composición que fg es medible en Y . Como $(fg)^{-1}(-\infty, c) \subset Y$, tal conjunto es medible en X .

Por otra parte $fg^{-1}(\{\infty\}) = f^{-1}\{\infty\} \cap \{0 < g \leq \infty\} \cup f^{-1}\{-\infty\} \cap \{-\infty \leq g < 0\} \cup g^{-1}\{\infty\} \cap \{0 < f \leq \infty\} \cup g^{-1}\{-\infty\} \cap \{-\infty \leq f < 0\}$ que es medible, y análogamente con $(fg)^{-1}(\{-\infty\})$. $\square$

Proposición 2.12. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Entonces f/g es medible.

La siguiente noción juega un papel importante en la teoría de la integración.

Definición 2.13. Una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina simple si su rango $f(X)$ es finito.

Proposición 2.14. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función simple no nula entonces f se puede representar en forma única como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}, \quad (2.1)$$

donde los α_i son distintos y los A_i son conjuntos disjuntos dos a dos.

Observación 2.4. La expresión (2.1) se llama la forma canónica de una función simple.

Proposición 2.15. *Toda función de la forma:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}(x),$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$, $E_i \in \mathcal{A}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ es simple.

Demostración. Es inmediato comprobar que el rango de f es finito. $\square$

Proposición 2.16. *Si $f : X \rightarrow [0, \infty]$ es una función medible entonces existe una sucesión creciente $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $\lim g_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. Asimismo, si $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es medible existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $|g_n|$ es creciente, $|g_n| \leq |f|$ y aproxima puntualmente a f . En ambos casos si f es acotada la convergencia de g_n hacia f es uniforme.*

Observación 2.5. Si $f : X \rightarrow Y$, Y un espacio de Banach separable, es una función medible en el sentido hecho preciso al principio del capítulo, entonces f se puede obtener como el límite puntual de una sucesión de funciones simples. Véase [1].

2.1.1. Ejercicios

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de Y , pruébese que:
 - a) $f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i)$.
 - b) $f^{-1}(\cap_i A_i) = \cap_i f^{-1}(A_i)$.
 - c) Para $A \subset Y$, $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$.
 - d) Para $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X : $f(\cup_i B_i) = \cup_i f(B_i)$.
 - e) Para $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X : $f(\cap_i B_i) \subset \cap_i f(B_i)$. Póngase un ejemplo para ilustrar la falsedad del contenido contrario.
2. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, $Y \subset X$, $Y \in \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A}_Y = \{E \in \mathcal{A} : E \subset Y\}$, $\mu_Y(E) = \mu(E)$ para $E \in \mathcal{A}_Y$. Pruébese que $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ es un espacio medible. Tal espacio es llamado un subespacio medible de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
3. Sea $Z \subset X$ y $(Z, \mathcal{B}, \nu)$ un espacio medible. Pruébese que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medible donde $\mathcal{A} = \{E : E \cap Z \in \mathcal{B}\}$, $\mu(E) = \nu(E \cap Z)$, $E \in \mathcal{A}$. Pruébese también que $(Z, \mathcal{A}_Z, \mu_Z)$ es el propio espacio $(Z, \mathcal{B}, \nu)$.
4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible, $Y \in \mathcal{A}$ y $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Pruébese que f es medible si y sólo si es medible como función en Y con respecto al subespacio $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

5. Si Y, X son conjuntos Y^X se define como el conjunto de las aplicaciones $f: X \rightarrow Y$. Usando la idea de función característica ¿se te ocurre por qué 2^X suele designar al conjunto de todos los subconjuntos de X ?
6. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles y $E^* = \overline{\lim} E_n$. Pruébese que:

$$\chi_{E^*}(x) = \overline{\lim} \chi_{E_n}(x).$$

7. Se define la parte positiva f^+ de una función f como:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) \leq 0, \end{cases}$$

mientras la parte negativa f^- se define como:

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pruébese que f es medible si y sólo si f^+ y f^- son medibles.

8. Si f es medible, entonces $|f|$ y $|f|^2$ son medibles.
9. Una función monótona definida en la recta real es medible-Lebesgue.
10. Pruébese que una función monótona tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.
11. Se dice que una función real f definida en un espacio métrico X es semicontinua superiormente (inferiormente) si para cada $x \in X$:

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x) \quad [\quad f(x) \leq \underline{\lim}_{y \rightarrow x} f(y)].$$

Pruébese que si X está dotado de una medida exterior métrica y f es semicontinua inferior o superiormente entonces f es medible.

Indicación. Nótese que:

$$\underline{\lim}_{y \rightarrow x} f(y) = \sup_{\delta \rightarrow 0+} \left\{ \inf_{y \in B(x, \delta) \setminus \{x\}} f(y) \right\}.$$

Demuéstrese que f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(c, +\infty)$ es abierto para cada c .

12. Sea $f(x)$ una función medible y defínase:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0. \end{cases}$$

Pruébese que g es medible.

13. Se define la *clase de Baire* n -ésima $\mathcal{C}_n$ de funciones f como: $f \in \mathcal{C}_n$ si f es el límite *puntual* de una sucesión de funciones $\{f_k\} \subset \mathcal{C}_{n-1}$, siendo $\mathcal{C}_0$ la clase de las funciones continuas. Pruébese que todas las funciones de $\mathcal{C}_n$ son medibles.
14. Pruébese que la función característica $\chi_{\mathbb{Q}}$ de los racionales en $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{C}_2$.
- Indicación.** Escribese $\mathbb{Q} = \{q_n\}$ y pruébese que si $F = \{q_1, \dots, q_N\}$ entonces $\chi_F \in \mathcal{C}_1$.
15. Sea f medible y defínase:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1 & f(x) \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pruébese que g es medible.

16. Sea $G \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Pruébese que χ_G es el límite en casi todo punto de una sucesión de funciones continuas.

2.2. Convergencia de funciones medibles. Teorema de Egoroff. Convergencia en medida

Definición 2.17. Se dice que una propiedad P relativa a los elementos de un espacio de medida X es cierta en casi todo punto (abreviado “en c.t. $x \in X$ ”) si es satisfecha por todos los elementos de $X \setminus N$, donde N tiene medida cero.

Observación 2.6. En otras palabras, el conjunto de puntos donde P no se cumple es subconjunto de un conjunto de medida cero N .

Si el espacio X es completo, P es válida si el conjunto donde P no se satisface tiene medida cero.

Definición 2.18. Una función $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ se dice *casi medible* ([1]) si existe $N \subset X$ de medida cero tal que $f|_{N^c} : N^c \rightarrow [-\infty, \infty]$ es medible.

El interés de la definición es la propiedad siguiente.

Proposición 2.19. Sea $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función medible y $g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función que cumple $g(x) = f(x)$ en c.t. $x \in X$. Entonces g es casi medible. En particular, g es medible si X es completo.

Demostración. Sea N un conjunto nulo tal que $f = g$ en N^c . Para G abierto

$$g^{-1}(G) = g^{-1}(G) \cap N^c + g^{-1}(G) \cap N = (f|_{N^c})^{-1}(G) \cap N^c + g^{-1}(G) \cap N.$$

Como $f = g$ en N^c está claro que g es casi medible. En caso de que X sea completo, el conjunto $g^{-1}(G) \cap N$ también es medible. $\square$

Observación 2.7. En muchos casos una función f se obtiene como límite en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles. La siguiente definición es entonces útil.

Definición 2.20. Se dice que una función $f : D \subset X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es casi medible si existe N nulo tal que $N^c \subset D$ y $f|_{N^c} : N^c \rightarrow [-\infty, \infty]$ es medible.

Observación 2.8. En este caso f no está definida en un conjunto D^c contenido en otro de medida nula, luego la función está definida en casi todo punto. Si el espacio es completo el propio D^c es nulo.

Proposición 2.21. Si $f : D \subset X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es casi medible, X es un espacio de medida completo y $\bar{f}$ es cualquier extensión de f a X entonces $\bar{f}$ es medible.

Proposición 2.22. Sean f, g funciones con dominios D_f, D_g que toman valores en $[-\infty, \infty]$ y supongamos que $f = g$ en casi todo punto, es decir, existe N nulo, $N^c \subset D_f \cap D_g$, tal que $f = g$ en N^c . Entonces g es casi medible si f lo es.

Definición 2.23. Se dice que una sucesión de funciones f_n converge a f en casi todo punto, abreviadamente $\lim f_n = f$ en c.t. x , si $\lim f_n(x) = f(x)$ para c.t. $x \in X$.

Proposición 2.24. Sean $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una sucesión de funciones medibles y $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ tales que $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto, entonces f es casi medible. Más aún, f es medible si el espacio X es completo.

Demostración. Si Y es conjunto donde f_n converge a f , f es medible en Y y $f^{-1}(G) \cap Y$ es medible para todo abierto G . Siendo $N = X \setminus Y$ tenemos que $f^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap Y + f^{-1}(G) \cap N$ de donde f es medible. $\square$

Más generalmente se tiene lo siguiente.

Proposición 2.25. Sean $f_n : D_n \rightarrow [-\infty, \infty]$ casi medibles, $f : D \rightarrow [-\infty, \infty]$ y $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto. Entonces f también es casi medible.

Demostración. Existe N nulo, $N^c \subset D \cap D_n$ para todo n tal que $f_n \rightarrow f$ en N^c . Asimismo, f_n es medible en N_n^c luego todas las f_n y por tanto f son medibles en $N^c \cap \bigcap_n N_n^c$. Esto significa que f es casi medible. $\square$

Una función medible $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se dice *finita* en c. t. $x \in X$ si $\{x : |f(x)| = \infty\}$ no excede un conjunto de medida cero.

Una sucesión de funciones f_n converge uniformemente a una función f en un conjunto E si tanto f como las f_n son finitas en E y se satisface que $\limsup_E |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Definición 2.26. Una sucesión f_n de funciones converge casi uniformemente a una función f si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E \subset X$ con $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ de suerte que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en E .

Observaciones 2.9.

- a) Bajo las condiciones de la definición, para cada m existe E_m con $\mu(E_m^c) < \frac{1}{m}$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en E_m . Por tanto la sucesión $f_n \rightarrow f$ puntualmente en $E = \cup E_m$ y todas las f_n y f son finitas en E . Nótese además que $\mu(E^c) = 0$. Luego está implícito en la definición que f y f_n son finitas en c. t. $x \in X$, y que $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto.
- b) Se sigue de la definición que si las f_n son medibles entonces f es una función casi medible. De hecho medible si X es completo.

La siguiente proposición es fruto de estas reflexiones

Proposición 2.27. *Si una sucesión f_n de funciones medibles converge casi uniformemente a una función f en X entonces f_n converge a f en c. t. $x \in X$. En particular, f es casi medible.*

Teorema 2.28 (Teorema de Egoroff). *Sean f_n, f funciones medibles y finitas en casi todo punto de un espacio X con medida finita. Si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c. t. $x \in X$ entonces f_n converge a f casi uniformemente en X .*

Demostración. Sea Y la parte de X donde f_n converge a f . Todos los conjuntos que ahora se definen son subconjuntos de Y . Para $k \in \mathbb{N}$ se introduce $E_n^k = \cap_{m \geq n} \{|f_m(x) - f(x)| < 1/k\}$. Resulta E_n^k creciente en n con $\lim_n E_n^k = Y$, por tanto $\lim \mu(E_n^k)^c = 0$ (el complementario relativo a Y). Esto significa que para cada k existe n_k con:

$$\mu((E_{n_k}^k)^c) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

El conjunto:

$$F = \cap_k E_{n_k}^k,$$

es tal que $\mu(F^c) < \varepsilon$. Resulta obvio que f_n converge a f uniformemente en F . $\square$

Observación 2.10. Sean $f_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, $A \subset \mathbb{R}^N$ de medida finita, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ en casi todo punto $x \in A$ con f finita en casi todo punto. Se puede decir del límite f que para cada $\varepsilon > 0$ existe $E \subset A$, $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$ tal que $f|_E$ es continua, incluso que existe $K \subset A$ compacto, $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ siendo $f|_K$ es continua. Esto significa que “algo” de la continuidad de las f_n se transfiere al límite f ¡a pesar de que la convergencia es incluso más débil que la convergencia puntual!

Definición 2.29. *Se dice que una sucesión f_n de funciones medibles y finitas en casi todo punto converge en medida a una función medible f si para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$\lim \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0. \quad (2.2)$$

Observaciones 2.11.

- a) Se desprende de los conjuntos implicados en (2.2) que la propia definición requiere la *medibilidad previa* de f .

- b) f debe ser necesariamente finita en casi todo punto. En efecto, para ε fijado y todo n : $\{|f(x)| = \infty\} \subset \{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ de donde se deduce la afirmación.
- c) El límite en medida de una sucesión de funciones medibles es único módulo un conjunto de medida cero. En efecto, si f y g son dos funciones medibles, resultado del límite en medida de una misma sucesión de funciones medibles f_n , entonces $f = g$ en casi todo punto. Obsérvese que $\{f \neq g\} = \cup_m \{|f(x) - g(x)| \geq 1/m\} = \cup_m H_m$. Si $F_m^n = \{|f(x) - f_n(x)| \geq 1/2m\}$, $G_m^n = \{|g(x) - f_n(x)| \geq 1/2m\}$ resulta que para cada n : $H_m \subset F_m^n \cup G_m^n$. Por tanto H_m tiene medida cero y $\{f \neq g\}$ también tiene medida cero.

Las convergencias “en casi todo punto” y casi uniforme de una sucesión de funciones son esencialmente más fuertes que la convergencia en medida.

Proposición 2.30. *Si una sucesión f_n de funciones medibles converge casi uniformemente a una función medible f entonces f_n converge a f en medida.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $E_k \subset X$ medible con $\mu(E_k^c) < 1/k$ y $n_k \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E_k^c,$$

para $n \geq n_k$. De ahí se deduce el resultado. $\square$

Corolario 2.31. *Sea X un espacio de medida finita y f_n, f funciones medibles y finitas en casi todo punto tales que $\lim f_n(x) = f(x)$ para c. t. $x \in X$. Entonces f_n también converge a f en medida.*

Definición 2.32. *Una sucesión de funciones f_n se dice de Cauchy en medida si cada f_n es medible y finita en casi todo punto, y para cada $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu\{|f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Observación 2.12. Sin $f_n \rightarrow f$ en medida entonces f_n es de Cauchy en medida porque:

$$\{|f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|f(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon/2\}.$$

Nota. Para “razonar en medida” con frecuencia resulta conveniente recurrir al contenido $B^c \subset A^c$ para probar $A \subset B$.

El recíproco también es cierto, como se enuncia un poco más adelante.

Proposición 2.33. *Toda sucesión de Cauchy en medida f_n admite una subsucesión $f_{n'}$ que converge casi uniformemente a una función medible f .*

Demostración. Demostración Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$:

$$\mu\{|f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k}\} < \frac{1}{2^k} \quad n \geq m \geq n_k,$$

pudiéndose tomar la sucesión n_k creciente. Consideramos el conjunto:

$$F_m = \cup_{k \geq m} E_k,$$

con

$$E_k = \{|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}.$$

Resulta claro que:

$$\mu(F_m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}.$$

En F_m^c para $j > h \geq m$ resulta:

$$|f_{n_j}(x) - f_{n_h}(x)| < \frac{1}{2^{h-1}}.$$

Por tanto f_{n_k} es de Cauchy uniformemente en F_m^c y converge uniformemente a una función medible $f^{(m)}$ en F_m^c . Como esto sucede para todo m , las $f^{(m)}$ definen una función medible f en $Y := \cup_m F_m^c$. Definiendo f como cero en Y^c resulta entonces que $f_{n_k} \rightarrow f$ en casi todo punto y casi uniformemente en X . $\square$

Proposición 2.34. *Toda sucesión de de Cauchy en medida f_n admite un límite en medida f que es una función medible.*

2.2.1. Ejercicios

▲ Teorema de Egoroff

1. Sea $\mathbb{R}$ la recta real con la medida de Lebesgue, f_n la función característica del intervalo $[n, \infty)$. Probar que f_n converge en casi todo $x \in \mathbb{R}$ pero no converge casi-uniformemente.
2. Sea f_n una sucesión de funciones medibles en un espacio de medida finito X . Supóngase que el conjunto $\{f_n(x)\}$ es acotado para casi todo $x \in X$. Pruébese que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $c > 0$ y un conjunto medible $E \subset X$ con $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ tal que $|f_n(x)| \leq c$ para todo $x \in E$.

▲ Convergencia en medida

3. Sea X un espacio de medida $\mu(X) < +\infty$. Sea f_n una sucesión de funciones medibles finitas para casi todo punto, que converge a una función f para casi todo punto siendo $f \neq 0$, $f_n \neq 0$ para cada n y en casi todo punto. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $b > 0$ y un conjunto medible E_n tales que $|f_n(x)| \geq b$ en E_n y $\mu(E_n^c) < \varepsilon$.

Indicación. Demuéstrese primero la afirmación para la función f .

4. Sea X un espacio de medida finita. Sean f_n, g_n sucesiones de funciones medibles que son finitas para casi todo punto y que respectivamente convergen en medida a sendas funciones medibles f y g . Sean α, β números reales arbitrarios. Entonces:

- a) $\alpha f_n + \beta g_n$ converge en medida a $\alpha f + \beta g$.
- b) $|f_n|$ converge en medida a $|f|$.
- c) $f_n g$ converge en medida a fg .
- d) $f_n g_n$ converge en medida a fg . [Indicación. Considérese primero el caso $f = g = 0$.]
- e) Si $f_n \neq 0$ para casi todo punto y si $f \neq 0$ para casi todo punto entonces $1/f_n$ converge a $1/f$ en medida. [Indicación. Usar el problema 3].
- 5. Sea f_n una sucesión de funciones medibles finitas para casi todo punto en un espacio de medida finita X . Para cada $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ sea:

$$E_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Demuéstrese que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para casi todo $x \in X$ si y sólo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu[\cup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)] = 0. \quad (1)$$

Indicación. Sea $F = \{x : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\}$. Entonces $F = \cup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim} E_n(1/k)$. Demuéstrese que $\mu(F) = 0$ si y sólo si se satisface (1).

- 6. Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ la clase de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, μ la medida en $\mathcal{A}$ que da el número de elementos. Demuéstrese que en este espacio la convergencia en medida equivale a la convergencia uniforme.
- 7. En $[0, 1)$ se definen las funciones $f_m^n(x)$ como 1 si $x \in [(m-1)/n, m/n)$, 0 en el resto. Enumérense las funciones para construir una sucesión φ_j que converge en medida a cero pero que es tal que $\lim \varphi_j(x)$ no existe en ningún $x \in [0, 1)$.
- 8. Sea f_n una sucesión de funciones medibles finitas para casi todo punto en un espacio X de medida finita. Pruébese la existencia de una sucesión $\lambda_n > 0$ tal que $\lambda_n^{-1} f_n$ converge a cero para casi todo $x \in X$.
Indicación. Pruébese que $|f_n(x)| \leq c = \text{constante}$ sobre un conjunto E_n con $\mu(X \setminus E_n) < 2^{-n}$.

2.3. Integración de funciones simples

Definición 2.35. Se dice que la función simple

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i},$$

donde los $E_i \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, $c_i \in \mathbb{R}$, es integrable si $\mu(E_i) < \infty$ siempre que $c_i \neq 0$. Su integral se define como:

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i),$$

donde se toma $c_i\mu(E_i) = 0$ siempre que $c_i = 0$ (aunque $\mu(E_i) = \infty$). Para E medible y f con la forma anterior, se dice que f integrable en E si $f\chi_E$ es integrable poniendo:

$$\int_E f \, d\mu = \int f\chi_E \, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i\mu(E_i \cap E). \quad (2.3)$$

En particular,

$$\int_E d\mu = \mu(E),$$

si E tiene medida finita.

Observaciones 2.13. La representación de la función simple f podría contener coeficientes $c_i = 0$ acompañados de funciones χ_{E_i} con E_i de medida infinita, pero éstos no se tienen en cuenta en el valor de la integral. Para evitar esta aclaración, se adopta el convenio de tomar

$$c_i\mu(E_i) = 0$$

en la definición (2.3) siempre que $c_i = 0$ independientemente de si E_i tiene medida finita o no. Al fin y al cabo, esto sólo refleja el hecho de que la integral de la función cero en E_i (es decir $0\chi_{E_i}$) es cero. En particular la “función simple” cero es integrable en X con integral cero.

Proposición 2.36. Si $f = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{E_i}$ es una función integrable simple con los E_i disjuntos dos a dos y

$$f = \sum_{j=1}^m d_j\chi_{F_j},$$

es otra representación de f en donde los F_j también son disjuntos dos a dos, entonces:

$$\sum_{i=1}^n c_i\mu(E_i) = \sum_{j=1}^m d_j\mu(F_j).$$

En otras palabras $\int f \, d\mu$ no depende de la representación de f .

Demostración. Admitimos que todas las constantes c_i y d_j son no nulas. Así

$$\cup_i E_i = \cup_j F_j.$$

En efecto si $x \in E_i$ entonces $f(x) \neq 0$ y $x \in F_j$ para algún j . La misma idea da el contenido inverso. Como los conjuntos son disjuntos dos a dos:

$$\cup_i E_i = \cup_i \cup_j E_i \cap F_j = \cup_j \cup_i F_j \cap E_i = \cup_j F_j.$$

Así:

$$\sum_i c_i\mu(E_i) = \sum_i \sum_j c_i\mu(E_i \cap F_j) = \sum_j \sum_i d_j\mu(F_j \cap E_i) = \sum_j d_j\mu(F_j).$$

□

Observación 2.14. A los efectos del teorema siguiente conviene presentar una representación adecuada de la suma de dos funciones simples. Si

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{F_j},$$

son funciones simples, $\{E_i\}$, $\{F_j\}$ disjuntos dos a dos, llamamos $E = \cup E_i$, $F = \cup F_j$ y ponemos:

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i \setminus F} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^m 0 \chi_{F_j \setminus E},$$

que es otra escritura de f donde posiblemente algunos de los conjuntos implicados puede ser vacío y análogamente:

$$g = \sum_{i=1}^n 0 \chi_{E_i \setminus F} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_j \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^m d_j \chi_{F_j \setminus E}.$$

La suma se representa como:

$$f + g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i \setminus F} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^m 0 \chi_{F_j \setminus E},$$

y si f, g son integrables, $f + g$ es integrable y de la representación se deduce que:

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Teorema 2.37. *Supongamos que f y g son funciones integrables y simples, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,*

a) [Linealidad]. $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

b) Si $f \geq 0$ c. t. $x \in X$ entonces $\int f d\mu \geq 0$.

c) [Comparación]. Si $f \geq g$ c. t. $x \in X$ entonces $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

d) $|f|$ es integrable y

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

e) $\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu$.

f) Si $m \leq f \leq M$ en en casi todo punto de un conjunto medible E con $\mu(E) < \infty$ entonces:

$$m\mu(E) \leq \int f d\mu \leq M\mu(E).$$

- g) [Monotonía en el dominio de integración]. $f \geq 0$ c. t. $x \in X$ y $E \subset F$ medibles implica:

$$\int_E f \leq \int_F f.$$

- h) [Aditividad completa en el dominio de integración]. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$:

$$\int_E f = \sum_1^{\infty} \int_{E_n} f.$$

Definición 2.38. Se dice que una sucesión f_n de funciones simples e integrables es de Cauchy en media si

$$\int |f_n - f_m| d\mu \rightarrow 0,$$

cuando $m, n \rightarrow \infty$.

Proposición 2.39. Si f_n es una sucesión de funciones simples e integrables que es de Cauchy en media, f_n converge en medida a una función medible f que es finita en casi todo punto.

2.4. Integrabilidad de funciones. Integral de Lebesgue

Definición 2.40. Sea $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función medible en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Se dice que f es integrable si existe una sucesión f_n de funciones integrables simples tal que:

- a) $f_n \rightarrow f$ en c. t. $x \in X$.
- b) f_n es de Cauchy en media.

Proposición 2.41. Una función medible $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es integrable si y sólo si existe una sucesión f_n de funciones integrables simples tal que:

- a') $f_n \rightarrow f$ en medida.
- b) f_n es de Cauchy en media.

Observación 2.15.

- i) Si f es integrable entonces f es finita en casi todo punto.
- ii) Si f es integrable y g es una función medible tal que $f = g$ en casi todo punto, entonces g es integrable. Más abajo definiremos la noción de integral de f . Una consecuencia inmediata será que las integrales de f y g también coinciden.

De la definición de integrabilidad de f resulta la existencia del límite:

$$I = \lim \int f_n d\mu,$$

pues:

$$\left| \int f_n d\mu - \int f_m d\mu \right| \leq \int |f_n - f_m| d\mu.$$

Tal límite se define como la integral de f escribiéndose $I = \int f d\mu$.

Observación 2.16. Nótese que la nueva noción de integral coincide en el caso de funciones simples con la que se ha dado para esta clase más restrictiva. Si f es una tal función basta poner $f_n = f$ en la nueva definición de integral.

La coherencia de la definición requiere el siguiente resultado.

Teorema 2.42. *Sean f_n, g_n dos sucesiones de funciones simples e integrables que satisfacen las condiciones a), b) de la definición relativas a una función medible dada f . Entonces:*

$$\lim \int f_n d\mu = \lim \int g_n d\mu.$$

Observación 2.17. Ahora resulta inmediato que las integrales de f y g en las condiciones de la observación 2.15-ii) coinciden.

La demostración del teorema requiere dos lemas.

Lema 2.43. *Sea f_n una sucesión de funciones simples e integrables que cumple las propiedades a) y b) de la definición. Entonces:*

$$\lambda(E) = \lim \int_E f_n d\mu,$$

define una función completamente aditiva en $\mathcal{A}$.

Lema 2.44. *Si f_n, g_n son dos sucesiones de funciones simples e integrables que satisfacen las condiciones a), b) de la definición de integrabilidad con respecto a una misma función medible f y*

$$\lambda(E) = \lim \int_E f_n d\mu \quad \nu(E) = \lim \int_E g_n d\mu,$$

son las correspondientes funciones completamente aditivas asociadas, entonces:

$$\lambda(E) = \nu(E),$$

para todo conjunto E σ -finito con respecto a μ .

Observación 2.18. Para demostrar el Teorema 2.42 como consecuencia del Lema 2.44 hace falta demostrar que para toda función integrable f el conjunto:

$$\{x : f(x) \neq 0\}$$

es σ -finito. Esto se relega a los ejercicios (Ejercicio 5).

Introducimos a continuación algunas definiciones.

Definición 2.45. Si f es medible en X y $E \subset X$ es medible diremos que f es integrable sobre E si $f\chi_E$ es integrable. En ese caso se define:

$$\int_E f = \int f\chi_E d\mu. \quad (2.4)$$

Observación 2.19. Se sigue de la definición que si f es integrable, entonces lo es sobre cada E siendo:

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

Es más, se deduce del Lema 2.43 que $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ es completamente aditiva y, como vamos a comprobar más tarde, una medida con signo (finita) en X . Por tanto, las funciones integrables son una fuente natural para esta clase de medidas. Por otra parte, el teorema de Radon-Nikodym ([9]) viene a decir que una buena parte de éstas se representan de así.

Corolario 2.46. Si f es integrable entonces

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

es una función completamente aditiva. Define por tanto una medida con signo finita.

Demostración. Obsérvese que $\lambda(E)$ siempre es finita. □

Propiedad 2.47. Sea $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ medible y $E \subset X$ un conjunto de medida cero. Entonces f es integrable en E y

$$\int_E f d\mu = 0.$$

Damos ahora la definición de “integrable sobre E ” para funciones que en principio no están definidas “fuera” de E .

Definición 2.48. Sea $f : E \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función medible en un conjunto $E \subset X$, $E \in \mathcal{A}$. Se dice que f es integrable si lo es observada en el espacio de medida $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ (Ejercicio 2). En ese caso también ponemos:

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_E.$$

Observaciones 2.20.

- a) No resulta difícil probar que f es integrable en E si y sólo si su extensión $\bar{f}$ por cero a X es integrable en X y además:

$$\int_E f d\mu = \int \bar{f} d\mu. \quad (2.5)$$

- b) Si E^c tiene medida cero y f es integrable en E entonces la identidad (2.5) es cierta no importa cómo se haya elegido la extensión $\bar{f}$ de f al espacio X .

Para terminar con esta plaga de definiciones consideramos ahora la integrabilidad de funciones que sólo están definidas en casi todo punto. Por ejemplo, si f, g son integrables pretendemos definir la integrabilidad de $f + g$, función que no está definida en $N = \{f = \pm\infty\} \cap \{g = \pm\infty\}$, aunque $\mu(N) = 0$.

Definición 2.49 (cf. [1]). Sea $f : D \subset X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función con dominio D . Se dice que f es integrable si existe un conjunto nulo N tal que $N^c \subset D$ y $f : N^c \rightarrow [-\infty, \infty]$ es integrable. En ese caso se define:

$$\int f \, d\mu = \int_{N^c} f \, d\mu$$

Observaciones 2.21.

- a) Está implícito en la definición que f ha de ser casi-medible. Si el espacio fuese completo D sería medible, D^c de medida cero en X ; por tanto f sería medible en D y como $D \setminus N^c = D \cap N$ tiene medida cero la integral de arriba sería la integral en D . Más aún valdría $\int_X \bar{f} \, d\mu$, con cualquier extensión de $\bar{f}$ de f a X .
- a) La definición no depende del conjunto nulo N . Si N_1 es otro conjunto en las mismas condiciones resulta:

$$\int_{N_1^c} f \, d\mu = \int_{N_1^c \cap N^c} f \, d\mu + \int_{N_1^c \cap N} f \, d\mu = \int_{N^c \cap N_1^c} f \, d\mu = \int_{N^c} f \, d\mu.$$

- b) De acuerdo con la Observación 2.20 la integral de f vale

$$\int f \, d\mu = \int \bar{f} \, d\mu$$

donde $\bar{f}$ es cualquier extensión de f a X (la discrepancia tendría efecto sobre N que es de medida cero).

- c) Si f, g son integrables, más adelante nos plantearemos la posibilidad de que fg sea integrable y en ese caso fg sólo está definida en casi todo punto. De hecho en N^c con $N = \{f = 0\} \cap \{g = \pm\infty\} \cup \{f = \pm\infty\} \cap \{g = 0\}$.

2.4.1. Ejercicios

▲ Integración de funciones simples

1. Pruébese que si f, g son simples e integrables, fg también lo es.
2. Una función medible $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice escalonada si existen $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ tales que f es constante sobre cada (x_{i-1}, x_i) , $1 \leq i \leq m$, siendo cero en el resto. Pruébese que la suma y el producto de funciones escalonadas lo es.

3. Demuéstrese que una función integrable simple f es cero en casi todo punto si y sólo si $\int_E f \, d\mu = 0$ para todo conjunto medible E .
4. Sea f una función integrable y simple tal que $f(x) \geq 0$ para casi todo punto. Probar que $\int f \, d\mu = 0$ implica $f = 0$ en casi todo punto.
5. Probar que si f es integrable, entonces $N = \{x : |f(x)| \neq 0\}$ es σ -finito.

2.5. Solución a los ejercicios

▲ Funciones medibles.

- Solución 16. G es unión disjunta de cubos diádicos Q_n . La función χ_Q de un cubo es límite en casi todo punto de funciones continuas f_k : tómese un cubo interior $Q' \subset Q$ a distancia $1/k$ de ∂Q , defínase f_k con valor 1 en Q' cero en Q^c y por interpolación lineal en el resto. Resulta que $f_k \rightarrow \chi_Q$ excepto en ∂Q que tiene medida cero. Como:

$$\chi_G = \sum_n \chi_{Q_n},$$

tomando $f_k = \sum_n f_k^{(n)}$, $f_k^{(n)}$ la función correspondiente a Q_n , se tiene que f_k es continua y $f_k \rightarrow \chi_g$ en casi todo punto.

▲ Teorema de Egoroff

- Solución 2. Sea Y el conjunto de puntos donde $f_n(x)$ está acotada. Por hipótesis

$$X = Y + N,$$

con $\mu(N) = 0$. Para $m \in \mathbb{N}$ formamos el conjunto $E_m \subset Y$:

$$E_m = \cap_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| \leq m\}.$$

Los conjuntos E_m son medibles, $E_m \subset E_{m+1}$ mientras $\lim E_m = Y$. Por tanto

$$\lim \mu(Y \setminus E_m) = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe m tal que $\mu((Y \setminus E_m) \cup N) < \varepsilon$, mientras

$$E_m = [(Y \setminus E_m) \cup N]^c.$$

Esto da la solución al problema.

▲ Convergencia en medida

- Solución 3. En primer lugar

$$X \setminus N = \{|f| > 0\} = \cup_n \{|f| > \frac{1}{n}\}, \quad \mu(N) = 0,$$

al ser X de medida finita se tiene $\mu\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \rightarrow 0$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existen $E \subset X$, $\hat{b} > 0$ con $\mu(E^c) < \frac{\varepsilon}{4}$ y

$$|f| > \hat{b} \quad x \in E.$$

Por el teorema de Egoroff $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $E_0 \subset E$ con $\mu(E \setminus E_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ de donde existe n_0 con

$$|f_n| > \frac{\hat{b}}{2} \quad x \in E_0,$$

para $n \geq n_0 + 1$. Existen además, $E_{n_0} \subset \dots \subset E_1 \subset E_0$, $\mu(E_{i-1} \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2n_0}$, $i = 1, \dots, n_0$, y constantes positivas $b_1, \dots, b_{n_0}$ tales que

$$|f_i| > b_i \quad x \in E_i,$$

$1 \leq i \leq n_0$. Tomando b el mínimo de las b_i 's y $\frac{b}{2}$ tenemos

$$|f_n| > b \quad x \in E_{n_0},$$

para todo n mientras $\mu(E_{n_0}^c) < \varepsilon$.

• Solución 4.

En el apartado c) observamos que $\mu(\{|g(x)| \geq m\}) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Como:

$$\begin{aligned} \{|g(f_n(x) - f)| \geq \varepsilon\} &\subset \{|g(f_n(x) - f)| \geq \varepsilon\} \cap \{|g_n(x)| \geq m\} \cup \\ &\quad \{|g(f_n(x) - f)| \geq \varepsilon\} \cap \{0 < |g_n(x)| < m\} \subset \\ &\quad \{|g_n(x)| \geq m\} \cup \{|f_n(x) - f| \geq \frac{1}{\varepsilon m}\}, \end{aligned}$$

uno observa que, fijado m , los dos últimos términos se pueden hacer tan pequeños como se desee para n grande.

Para d) basta probar el caso $f = g = 0$, es decir $f_n g_n \rightarrow 0$ en medida si $f_n \rightarrow 0$, $g_n \rightarrow 0$ en medida. En efecto:

$$\begin{aligned} g_n f_n - g f &= (g_n - g) f_n + g f_n - g f = \\ &= (g_n - g)(f_n - g) + (g_n - g)g + g(f_n - f), \end{aligned}$$

y en virtud de c) y la afirmación $g_n f_n - g f \rightarrow 0$ en medida.

Para probar la afirmación fijamos $M > 0$ y observamos que:

$$\begin{aligned} \{|g_n f_n(x)| \geq \varepsilon\} &\subset \{|g_n f_n(x)| \geq \varepsilon\} \cap \{|g_n(x)| \geq M\} \cup \\ &\quad \{|g_n f_n(x)| \geq \varepsilon\} \cap \{0 < |g_n(x)| < M\} \subset \\ &\quad \{|g_n(x)| \geq M\} \cup \{|f_n(x)| \geq \frac{1}{\varepsilon M}\}. \end{aligned}$$

Como los dos últimos términos tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$, $g_n f_n \rightarrow 0$ en medida.

En el apartado e) nos hace falta el ejercicio 3. Dado $\eta > 0$ existen E, E_n y b tales que

$$|f| \geq b \quad x \in E, \quad |f_n| \geq b \quad x \in E_n,$$

donde las medidas de E^c, E_n^c no exceden η . Así,

$$\{|f^{-1}(x) - f_n^{-1}(x)| \geq \varepsilon\} := A = A \cap F_n + A \cap F_n^c, \quad F_n = E_n \cap E,$$

El segundo término mide menos que 2η con independencia de η , el primero:

$$A \cap F_n \subset \{|f(x) - f_n(x)| \geq b^2 \varepsilon\},$$

que mide menos que η si n es grande. En total, la medida de A es arbitrariamente pequeña si n es grande.

- Solución 8. Existe $Y \subset X$, Y^c de medida cero, tal que todas las funciones f_n son finitas en Y .

Fijamos n y resulta

$$Y = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{x \in Y : |f_n(x)| \leq N\},$$

con lo que

$$\mu[\{x \in Y : |f_n(x)| \leq N\}^c] \rightarrow 0,$$

cuando $N \rightarrow \infty$ (este razonamiento requiere que Y tenga medida finita).

Luego existe c_n tal si $E_n = \{x \in Y : |f_n(x)| \leq c_n\}$ entonces $\mu(E_n^c) < 2^{-n}$ (los complementarios con respecto a Y).

Definimos

$$F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \quad \Rightarrow \quad \mu(F_n^c) \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La sucesión es creciente, si $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces F^c tiene medida cero y $\{\lambda_n^{-1} f_n\}$ con

$$\lambda_n = \frac{c_n}{\varepsilon_n},$$

$\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, converge casi-uniformemente a cero en Y .

E) Integración de funciones simples

- Solución 5. Existe una sucesión de funciones simples integrables f_n tales que convergen a f en cada punto de Y y de suerte que f es finita en Y , Y^c un conjunto nulo.

Por otro lado, $\text{sop } f_n = \{x : f_n(x) \neq 0\}$ tiene medida finita.

Formamos $M = \bigcup_n \text{sop } f_n$, que es σ -finito.

Al poner:

$$X = M \cap Y + Y^c + M^c \cap Y,$$

observamos que $f = 0$ en $M^c \cap Y$ luego:

$$\text{sop } f = \{x : f(x) \neq 0\} \subset M \cap Y + Y^c,$$

y el conjunto $M \cap Y + Y^c$ es σ -finito.

□

Capítulo 3

Integral de Lebesgue: propiedades de convergencia

3.1. Propiedades básicas

Una propiedad fundamental.

Teorema 3.1. *Sea f una función medible. Son equivalentes:*

- a) f es una función integrable.
- b) $|f|$ es integrable.
- c) f^+ y f^- son funciones integrables.

Demostración. Empezamos con a) $\Rightarrow$ b). Si f_n son las funciones simples e integrables que aproximan a f resulta $|f_n| \rightarrow |f|$ mientras

$$\int ||f_n| - |f_m|| \, d\mu \leq \int |f_n - f_m| \, d\mu.$$

Por tanto, $|f_n|$ es de Cauchy en media y

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \lim \int f \, d\mu_n \right| = \lim \left| \int f \, d\mu_n \right| \leq \lim \int |f_n| \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

Para b) $\Rightarrow$ c) observamos que $f^+ = \chi_{\{f \geq 0\}} |f|$, $f^- = \chi_{\{f \leq 0\}} |f|$, por lo que $f^\pm$ son funciones integrables. Además:

$$\begin{aligned} \int |f| \, d\mu &= \int_{\{f \leq 0\}} |f| \, d\mu + \int_{\{f \geq 0\}} |f| \, d\mu \\ &= \int f^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu. \end{aligned}$$

Que c) $\Rightarrow$ a) se sigue de un argumento directo. Si $f_n^\pm$ son las funciones simples integrables que aproximan a $f^\pm$ entonces $f_n^+ - f_n^-$ es simple integrable, aproxima a f y como sucesión, es de Cauchy en media.

Además,

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \lim \int (f_n^+ - f_n^-) \, d\mu = \\ &= \lim \int f_n^+ \, d\mu - \lim \int f_n^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. Sean f y g son funciones integrables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

a) $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

b) Si $f \geq 0$ c. t. $x \in X$ entonces $\int f \, d\mu \geq 0$.

c) Si $f \geq g$ c. t. $x \in X$ entonces $\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu$.

d) $|f|$ es integrable (véase más atrás) y

$$|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu.$$

e) $\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu$.

f) Si $m \leq f \leq M$ en en casi todo punto de un conjunto medible E con $\mu(E) < \infty$ entonces:

$$m\mu(E) \leq \int f \, d\mu \leq M\mu(E).$$

g) $f \geq 0$ c. t. $x \in X$ y $E \subset F$ medibles implica:

$$\int_E f \leq \int_F f.$$

h) Si $f(x) \geq m > 0$ sobre un conjunto medible E . Entonces

$$\mu(E) < \infty.$$

Más aún (desigualdad de Tchebychev):

$$m\mu(E) \leq \int_E f \, d\mu.$$

Demostración. a) La función $f + g$ es casi medible con dominio $D \supset N^c$ donde $D = X \setminus \{x : f = \pm\infty \text{ ó } g = \pm\infty\}$. La integral sobre X es, según se definió (Definición 2.49):

$$\int f + g \, d\mu = \int_{N^c} f + g \, d\mu = \int_{N^c} f \, d\mu + \int_{N^c} g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

h) $Y = \{f \neq 0\}$ es σ -finito, $f > m$ en casi todo punto de E significa que $E' = E \setminus N \subset Y$ con $\mu(N) = 0$. Resulta que $E' = \lim E'_n$ con E'_n una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita. Así

$$m\mu(E'_n) \leq \int_{E'_n} f \, d\mu \leq \int_{E'} f \, d\mu = \int f \, d\mu < \infty.$$

Al tomar límites

$$m\mu(E) = m\mu(E') \leq \int_E f \, d\mu.$$

□

La propiedad h) del teorema nos permite concluir la siguiente proposición.

Observación 3.1. Si una función simple es integrable de acuerdo con la Definición 2.35 lo es de acuerdo con la Definición 2.40.

Proposición 3.3. *Sea f una función simple y no negativa:*

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}.$$

Si f es integrable de acuerdo a la Definición 2.40 entonces todos los conjuntos E_i asociados a $c_i > 0$ son de medida finita.

Demostración. Es consecuencia de h). □

Otra definición es la siguiente.

Definición 3.4. *Sea $f \geq 0$ medible. Si f no es integrable definimos:*

$$\int f \, d\mu = \infty$$

Más generalmente, si f es una función medible cualquiera definimos su integral como:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \in [-\infty, \infty]$$

siempre que sea integrable una de las funciones f^+, f^- , por tanto $\int f \, d\mu = \infty$ si f^+ no es integrable pero f^- si, mientras $\int f \, d\mu = -\infty$ si f^+ es integrable pero f^- no.

Observación 3.2. Las funciones simples $f \geq 0$ que son no nulas sobre un conjunto de medida infinita no se admitieron como funciones integrables. Según hemos visto tampoco son integrables según la nueva definición y por ello tienen integral infinita:

$$\int f \, d\mu = \infty.$$

Esto podría haberse definido así desde un primer momento.

En consecuencia tenemos que

$$\int g \, d\mu = \infty$$

si $g \geq 0$ es simple y no integrable.

Para una función medible $f \geq 0$ sea

$$\mathcal{S} = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ es simple y } 0 \leq g \leq f\}.$$

Teorema 3.5. *Sea $f \geq 0$ una función medible. Entonces*

$$\int f \, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{S}} \int g \, d\mu. \quad (3.1)$$

Demostración. Consideramos primero el caso f integrable. Probamos entonces que para toda $g \in \mathcal{S}$, g es integrable y

$$\int f \, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{S}} \int g \, d\mu.$$

Si $g \in \mathcal{S}$ el conjunto $\{g \neq 0\} \subset \{f(x) > m\}$ para algún $m > 0$. Luego $\{g \neq 0\}$ tiene medida finita y g es integrable. Por otro lado la sucesión de funciones simples f_n del teorema de aproximación de funciones medibles se puede usar para la definición de integral y

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n.$$

Esto prueba la igualdad propuesta.

Suponemos ahora que f no es integrable. Habremos de probar que

$$\sup_{g \in \mathcal{S}} \int g \, d\mu = \infty.$$

Esta identidad es obvia si alguna de las $g \in \mathcal{S}$ es no integrable pues $\int g \, d\mu = \infty$. Suponemos entonces que todas las funciones de $\mathcal{S}$ son integrables. Si el supremo de tales integrales es finito, apelamos a la aproximación de f por funciones simples $0 \leq f_n \leq f$, f_n creciente, y resulta que la sucesión

$$\int f_n$$

está acotada superiormente. Se ve fácilmente que f_n de Cauchy en media lo que a su vez implica que f es integrable, en contra de lo supuesto. El supremo ha de ser entonces infinito. $\square$

Observación 3.3. Se puede usar (3.1) como definición de integral de Lebesgue. En ese caso se admite desde un principio que las integrales de funciones simples no negativas pueden tomar el valor infinito (cf. [15]).

Teorema 3.6. Sean f una función medible y $g \geq 0$ una función integrable tales que:

$$|f(x)| \leq g(x),$$

en casi todo punto. Entonces f también es integrable.

Demostración. Basta probar que $|f|$ es integrable y ello es consecuencia de que

$$\int f_n \leq \int g \, d\mu$$

para toda función simple $0 \leq f_n \leq |f|$. De ahí el supremo de tales integrales es finito. $\square$

Definición 3.7. Se dice que una función medible f está acotada esencialmente en X si existe $c \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c$$

para c. t. $x \in X$. El ínfimo de tales c se denomina el supremo esencial de f en X y se denota por

$$\sup \text{esen}_X f.$$

Observaciones 3.4.

a) Si f está acotada esencialmente y $0 \leq c < \sup \text{esen}_X f$ entonces el conjunto

$$\{|f(x)| > c\}$$

tiene medida positiva.

b) Se puede comprobar que el ínfimo esencial es también una cota esencial.

Corolario 3.8. Si f y g son funciones medibles, f es una función integrable-mientras g está esencialmente acotada entonces fg también es integrable.

Corolario 3.9. Toda función medible f que esté esencialmente acotada sobre un conjunto E de medida finita define una función integrable sobre E .

Teorema 3.10. Sea f integrable tal que $f(x) \geq 0$ en c. t. $x \in X$. Si $\int f \, d\mu = 0$ entonces $f = 0$ en casi todo punto.

Demostración. Sea f_n la sucesión de funciones simples de la Definición 2.40. Como:

$$f(x) = \lim f_n(x),$$

en casi todo punto, entonces:

$$f(x) = \lim |f_n(x)|,$$

en casi todo punto. Esto significa que podemos reemplazar f_n por $|f_n|$ en la definición de integral. Como ésta vale cero resulta entonces que:

$$\lim \int |f_n| d\mu = 0.$$

De aquí sale que $f_n \rightarrow 0$ en medida. Por tanto, $f = 0$ en casi todo punto. $\square$

Teorema 3.11. *Sea f una función medible y E medible de medida cero. Entonces f es integrable sobre E con integral $\int f d\mu = 0$.*

Demostración. La integral coincide con la de la extensión $\bar{f}$ de f que vale 0 en E^c . Como $\bar{f} = 0$ en casi todo punto, dicha integral es cero. $\square$

Teorema 3.12. *Sea f integrable con $f(x) > 0$ para todo $x \in E$. Si $\int_E f d\mu = 0$ entonces $\mu(E) = 0$.*

El siguiente resultado es muy útil en Cálculo de Variaciones.

Teorema 3.13. *Sea f una función integrable. Si $\int_E f d\mu = 0$ para todo conjunto medible E entonces $f(x) = 0$ para c. t. $x \in X$.*

Demostración. Es inmediato ver que f^+ y f^- han de ser cero en casi todo punto, luego $f = 0$. $\square$

3.1.1. Algunos resultados de convergencia

Recordamos la definición de función integrable. Una función medible $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es integrable si existe una sucesión f_n de funciones integrables simples tal que:

- a) $f_n \rightarrow f$ en c. t. $x \in X$.
- b) f_n es de Cauchy en media.

o alternativamente b) y

- a') $f_n \rightarrow f$ en medida.

Definición 3.14. *Sean f_n, f funciones integrables. Se dice que f_n es de Cauchy “en media” si*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| d\mu = 0.$$

Se dice asimismo que $f_n \rightarrow f$ “en media” si

$$\lim \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Teorema 3.15. *Sean f_n, f funciones integrables. Si f_n es de Cauchy en media entonces también es de Cauchy en medida. Análogamente si $f_n \rightarrow f$ en media entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.*

Proposición 3.16. *Sea f una función integrable y f_n la sucesión de funciones simples que cumplen a) y b) (o a') y b)) en la definición de función integrable. Entonces*

$$\lim \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Demostración. Se comprueba inmediatamente que si $f_m \rightarrow f$ para c. t. $x \in X$ (respectivamente, en medida) entonces, para n fijado, $|f_m - f_n| \rightarrow |f - f_n|$ para c. t. $x \in X$ (r. en medida). □

Teorema 3.17. *Sean f una función medible y f_n una sucesión de funciones integrables que cumplen las condiciones a) y b) (alternativamente a') y b)). Entonces f es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

En el siguiente resultado se establece la completitud de los espacios de funciones integrables que introduciremos después.

Teorema 3.18. *Sea f_n una sucesión de funciones integrables que satisface la condición de Cauchy en media. Entonces f_n converge en media a una función integrable f .*

Demostración. Si f_n es de Cauchy en media lo es también en medida luego $f_n \rightarrow f$ en medida para alguna función medible f , y por el teorema anterior, f es integrable con

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Bien, es inmediato ahora comprobar que $|f - f_n| \rightarrow 0$ en medida con $|f - f_n|$ de Cauchy en media. Por tanto, otra vez en virtud del teorema anterior se tiene que

$$0 = \lim \int |f - f_n| d\mu.$$

□

Se dice que una función medible f es una *función nula* si $f(x) = 0$ para casi todo punto. Se dice que dos funciones medibles f, g son equivalentes $f \sim g$ si $f - g$ es nula. Denotemos por $\bar{f}$ la clase de f .

Definición 3.19. *Se denota $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ (abreviado $\mathcal{L}^1(X)$ ó $\mathcal{L}^1$) el espacio de las funciones integrables. Asimismo $L^1(X, \mu)$ ($L^1(X)$ ó L^1) representa el conjunto de todas las clases $\bar{f}$ de funciones $f \in \mathcal{L}^1$.*

Resulta ahora evidente (Teorema 3.18) que $L^1(X)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|\bar{f}\|_1 := \int f d\mu,$$

con $f \in \bar{f}$. Por razones prácticas se omitirá toda referencia a las clases de equivalencia.

Un capítulo importante de la integral de Lebesgue trata del teorema fundamental del cálculo. Para una función integrable f en el intervalo (a, b) se define la integral indefinida

$$g(x) = \int_{(a,x)} f \, d\mu.$$

Una primera propiedad que se estudia es la continuidad de esta función. Resulta ser que g posee un grado de continuidad que excede el de la continuidad uniforme en (a, b) .

Definición 3.20. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y λ una función de conjunto en X . Se dice que λ es absolutamente continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda(E)| < \varepsilon$ cuando $\mu(E) < \delta$.

Las integrales “indefinidas” son absolutamente continuas.

Teorema 3.21. Si f es una función integrable entonces la función de conjunto

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

constituye una función absolutamente continua.

Demostración. Basta aproximar f por una función f_n integrable y simple, empleando después que f_n está acotada. $\square$

Corolario 3.22. Si f es una función integrable y E_n es una sucesión de conjuntos medibles tales que $\lim E_n = E$ con $\mu(E) = 0$ entonces

$$\lim \int_{E_n} f \, d\mu = 0.$$

Demostración. En primera impresión parece necesario usar que $\mu(E_n) \rightarrow 0$. Sin embargo, se tiene en cuenta que la integral indefinida λ es una medida finita con signo y que por tanto:

$$\lim \lambda(E_n) = \lim \int_{E_n} f \, d\mu = \lambda(E).$$

Si $\mu(E) = 0$ la continuidad absoluta de λ implica que $\lambda(E) = 0$. $\square$

Las siguientes definiciones están en principio desvinculadas de la teoría de la medida.

Definición 3.23. Sea f una función real definida en un intervalo (a, b) . Se dice que f es una función absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal

que para toda sucesión disjunta de intervalos abiertos I_n en (a, b) se satisface que

$$\sum_n |\Delta f_n| < \varepsilon$$

si $\sum \lambda(I_n) < \delta$ donde $I_n = (a_n, b_n)$, $\lambda(I_n) = b_n - a_n$ y $\Delta f_n = |f(b_n) - f(a_n)|$.

Observación 3.5. Una función absolutamente continua es uniformemente continua en (a, b) . Por ello, puede probarse que f admite una única extensión continua a $[a, b]$.

Una familia $\pi = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b]$, $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$, se llama una partición de $[a, b]$ mientras $\mathcal{P}$ designa el conjunto de las particiones de $[a, b]$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $\pi \in \mathcal{P}$, la variación de f con respecto a π se define como:

$$V_\pi^f = \sum_{i=1}^n |\Delta f_i| = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Definición 3.24. Se dice que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada si existe $M > 0$ tal que:

$$V_\pi^f \leq M$$

para toda $\pi \in \mathcal{P}$. Se denomina al número:

$$V_{[a,b]}(f)$$

la variación total de f en $[a, b]$.

La noción de función de variación acotada tiene que ver con la de curva rectificable. Una curva γ parametrizada por $x = t, y = f(t)$ donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es rectificable si

$$\Lambda = \sup_\pi \sum_{i=1}^n |P_i - P_{i-1}| < \infty,$$

donde $P_i = (t_i, f(t_i))$, $t_i \in \pi$ y π recorre las particiones $\mathcal{P}$ de $[a, b]$. Pues bien, γ es rectificable si y solamente si f es de variación acotada (Λ define la longitud de γ).

Se estudian en los ejercicios las propiedades básicas de estas clases de funciones. Entre éstas que la integral indefinida de una función integrable en el intervalo (a, b) define una función absolutamente continua.

3.2. Teorema de la convergencia dominada

Una de las imperfecciones de la integral de Riemann es su rigidez a la hora de permutar la integral y el paso al límite. La siguiente colección de resultados justifica la supremacía de la integral de Lebesgue sobre la de Riemann.

Teorema 3.25 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea f_n una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas:*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

para todo n y para casi todo $x \in X$. Sea

$$f(x) = \lim f_n(x) = \sup f_n(x),$$

donde f está definida en casi todo punto. Entonces

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$$

y en particular, f es integrable si y solamente si

$$\sup \int f_n \, d\mu$$

es finito.

Observaciones 3.6.

a) Debe notarse que la expresión

$$\sup \int f_n \, d\mu$$

da el valor de $\int f \, d\mu$ tanto si f es integrable como si no. Este es el papel que juega la hipótesis $f_n \geq 0$ en el enunciado.

b) El teorema es cierto sin las restricciones de signo que se han impuesto si las funciones son integrables.

Corolario 3.26. *Sea f_n una sucesión creciente de funciones integrables,*

$$f(x) = \lim f_n(x) = \sup f_n(x),$$

entonces

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$$

siendo f es integrable si y solamente si

$$\sup \int f_n \, d\mu$$

es finito.

Demostración. La función f es en principio medible. Además:

$$0 \leq f^- \leq f_1^-.$$

Esto significa que

$$\int f \, d\mu$$

está bien definida y es finita si f integrable e infinito si no lo es.

Por otro lado y del teorema anterior

$$\int (f - f_1) \, d\mu = \sup \int (f_n - f_1) \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu - \int f_1 \, d\mu.$$

Finalmente, f integrable si y sólo si $f - f_1$ es integrable. En particular:

$$\int f \, d\mu = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int (f - f_1) \, d\mu = \infty \quad \sup \int f_n \, d\mu = \infty.$$

Por tanto, tanto si f es integrable como si no,

$$\int f \, d\mu = \int (f - f_1) \, d\mu - \int f_1 \, d\mu.$$

Así:

$$\int f \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu.$$

□

Teorema 3.27 (Lema de Fatou). *Sea f_n una familia de funciones integrables y no negativas, mientras*

$$f(x) = \underline{\lim} f_n.$$

Entonces

$$\int f \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

En particular, f es integrable si el límite inferior del segundo miembro es finito.

Demostración. Si $f = \underline{\lim} f_n$ entonces

$$f = \lim g_n = \sup g_n,$$

con

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Las funciones g_n son integrables y

$$\int g_n \, d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k \, d\mu.$$

Del teorema de la convergencia monótona

$$\int f \, d\mu = \lim \int g_n \, d\mu = \lim \int g_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

□

Observaciones 3.7.

a) La desigualdad

$$\int f \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

es consistente con que f no sea una función integrable. En ese caso, claro está, deberá ser

$$\underline{\lim} \int f_n \, d\mu = \infty.$$

b) El carácter no negativo de las funciones f_n es esencial en el enunciado. Como ilustración de ello tómesese como ejemplo la sucesión $f_n = \chi_{[0, n\pi]}(x)$ sen x en el espacio $X = (0, \infty)$. Se tiene que

$$\int f_n \, d\mu = \begin{cases} 0 & n = \dot{2} \\ I & n = \dot{2} + 1, \end{cases}$$

donde $I = \int_{(0, \pi)}$ sen $d\mu t \, dt$. Se tiene $\underline{\lim} \int f_n \, d\mu = 0$ mientras $f = \underline{\lim} f_n = \text{sen } x$ que no es integrable en $(0, \infty)$.

c) El teorema sigue siendo cierto si la condición $f_n \geq 0$ se reemplaza por la existencia de una función integrable g tal que

$$f_n(x) \geq g(x)$$

para c. t. $x \in X$. En efecto,

$$\int f \, d\mu$$

tiene sentido porque

$$f^- \leq g^-.$$

Por otro lado:

$$\int f \, d\mu = \int (f - g) \, d\mu + \int g \, d\mu \leq \underline{\lim} \int (f_n - g) \, d\mu + \int g \, d\mu = \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

Nótese que para f medible, g integrable, f integrable si y solo si $f - g$ integrable.

Teorema 3.28 (Teorema de la Convergencia Dominada). *Sea f_n una sucesión de funciones integrables que converge en casi todo punto a una función medible f (alternativamente que converge en medida a una función medible f) y tal que:*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{para casi todo } x \in X,$$

donde g es una función integrable. Entonces f es una función integrable,

$$\lim \int |f_n - f| \, d\mu = 0,$$

y en particular

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demostración. El caso $\lim f_n = f$ en medida es más delicado (ver [9]).

Si $f = \lim f_n$ en casi todo punto entonces $|f| \leq g$ y f es entonces integrable.

Se tiene ahora que:

$$0 \leq 2g - |f - f_n|,$$

en casi todo punto. El lema de Fatou implica entonces que:

$$\int 2g \, d\mu \leq \int 2g \, d\mu - \overline{\lim} \int |f - f_n| \, d\mu,$$

es decir:

$$\overline{\lim} \int |f - f_n| \, d\mu = 0,$$

de donde se deducen las conclusiones del teorema. $\square$

Siguen a continuación algunas de las importantes aplicaciones del teorema de la convergencia dominada.

3.3. Integrales que dependen de parámetros

Remitimos a [1] y [11] para más información sobre el tema en un contexto aplicado.

Teorema 3.29. Sean Y un espacio métrico (típicamente $Y = Q$, Q abierto en $\mathbb{R}^m$) y

$$\begin{aligned} f : \quad X \times Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

una función que goza de las siguientes propiedades:

- a) $f(\cdot, y)$ medible para todo $y \in Y$,
- b) $f(x, \cdot)$ continua en Y para c. t. $x \in X$,
- c) existe $g \in L^1(X)$ tal que $|f(x, y)| \leq g(x)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Entonces la función

$$F(y) = \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$$

es continua en Y .

Observación 3.8. Una función con las propiedades a) y b) del teorema se conoce como función de Carathéodory.

Teorema 3.30. Sean ahora Q un abierto en $\mathbb{R}^m$ y

$$\begin{aligned} f : \quad X \times Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

una función que satisface:

- a) $f(\cdot, y)$ medible para todo $y \in Y$,
 b) $f(x, \cdot)$ es C^1 en Q para c. t. $x \in X$,
 c) Para todo $1 \leq j \leq m$ existe $g_j \in L^1(X)$ tale que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) \right| \leq g_j(x)$$

para todos los puntos $(x, y) \in X \times Q$ en los que esté definida la derivada.

Entonces la función F del teorema anterior es de clase C^1 en Q y además:

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) \, d\mu(x).$$

Ejemplo 3.9. Un planeta $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con densidad $\rho \in L^1(\Omega)$ crea un campo gravitatorio con intensidad de potencial

$$V(y) = G \int_{\Omega} \frac{\rho(x)}{|y-x|} \, dy.$$

La función $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ y además:

$$\Delta V(y) = 0 \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

3.4. Ejercicios

- Funciones integrables

1. Sean f, g funciones medibles, f integrable, $f = g$ en casi todo punto. Pruébese que g es integrable con $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$.
2. Consideremos $f : (\mathbb{N}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ donde μ es la medida que asigna a cada conjunto su número de elementos. Pruébese que f es integrable si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es absolutamente convergente con:

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

3. Complementando el ejercicio anterior, $f : (\mathbb{N}^N, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\alpha) = a_\alpha$, donde μ es la medida que asigna a cada conjunto de $\mathbb{N}^N$ su número de elementos. Pruébese análogamente que f es integrable si y sólo si la familia sumable $\sum_\alpha |a_\alpha|$ es convergente. Además:

$$\int |f| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |a_\alpha|.$$

Como se definió la noción de familia sumable sólo para sucesiones (familias) de términos $a_\alpha \geq 0$, ¿qué sentido puede darse a

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha ?$$

4. Una función de la forma $\chi_{(a,b)}\varphi$ con φ escalonada en $\mathbb{R}$ se dice escalonada en el intervalo (a,b) , y por tanto existen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ tales que φ es constante en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) , $1 \leq i \leq m$. Demuéstrese que si f es integrable en el intervalo (a,b) existe una sucesión de funciones escalonadas φ_n tales que $\int |f - \varphi_n| \, d\mu \rightarrow 0$ con $\varphi_n \rightarrow f$ para casi todo $x \in (a,b)$.

Indicación. Probar el resultado en primer lugar para el caso más sencillo de f simple. A tal fin usar que si E medible, $\mu(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G, G \subset \mathbb{R} \text{ abierto}\}$.

5. Sea f integrable en (a,b) . Demostrar que para $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ arbitrarios existen E medible con $\mu(E) < \delta$ y $g \in C[a,b]$ tales que $\sup_{(a,b) \setminus E} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.
6. Se dice que una función compleja f es simple si $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ donde los E_i son medibles disjuntos y los $c_i \in \mathbb{C}$. Se dice que una tal f es integrable si $\mu(E_i) < \infty$ siempre que $c_i \neq 0$. Se define la integral $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i)$. Como en el caso real, se dice que una función compleja medible f es integrable si existe una sucesión f_n de funciones simples

que es de Cauchy en media, es decir $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \int |f_n - f_m| d\mu \rightarrow 0$, mientras $\lim f_n(x) = f(x)$ para casi todo $x \in X$. Denuéstrese que una función compleja $f = f_1 + if_2$ es integrable si y sólo si lo son f_1 y f_2 , siendo $\int f d\mu = \int f_1 d\mu + i \int f_2 d\mu$.

- Propiedades elementales

7. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ y $(X, \mathcal{A}, \mu_2)$ espacios de medida, $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Probar que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, que una función simple f es μ_i integrable para $i = 1, 2$ si sólo si es μ integrable y

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

Finalmente, probar que una función medible f es μ_i integrable $i = 1, 2$ si sólo si es μ integrable y

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

8. Sea f una función integrable. Demuéstrese que si $\int_E f d\mu \geq 0$ para todo E medible entonces $f \geq 0$ para casi todo punto. Asimismo, pruébese que si $\mu(X) < +\infty$ y $\int_E f d\mu \leq \mu(E)$ para todo conjunto medible E entonces $f \leq 1$ para casi todo punto.

9. Demostrar que $f(x) = \sin x + \cos x$ no es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$.

10. Demostrar que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ no es integrable Lebesgue en $(1, +\infty)$.

11. Demostrar que $f(x) = \frac{1}{x}$ no es integrable Lebesgue en $(0, 1)$.

- Continuidad absoluta.

12. Sea g una función integrable en (a, b) mientras:

$$f(x) = \int_{(a,x)} g d\mu$$

(en sentido de Lebesgue). Probar que f es absolutamente continua.

13. Probar que f es de variación acotada si y sólo si $f = g_1 - g_2$ donde g_1, g_2 son funciones crecientes. Probar que si f es continua, las g_1, g_2 se pueden elegir continuas.

Indicación. Ensayar como g_1 la variación de a hasta x .

14. Probar que si f es absolutamente continua entonces es de variación acotada.
15. Demuéstrese que $f(x) = x \sin(1/x)$ es uniformemente continua pero no de variación acotada en $(0, 1)$.

- Teorema de la convergencia dominada, aplicaciones

16. Sea $f_n(x) = n$ si $0 \leq x \leq 1/n$, $f_n(x) = 0$ si $1/n \leq x \leq 1$. Probar que $\lim f = 0$ para casi todo $x \in [0, 1]$ mientras $\int_{[0,1]} f_n d\mu = 1$ para cada n . Esto prueba que la condición de acotación del teorema de la convergencia dominada es fundamental.

17. Consideremos en $\mathbb{N}$ la medida del número de elementos con:

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Demuéstrese que $f_n \rightarrow 0$ uniformemente mientras $\lim \int f_n d\mu \neq \int f d\mu$ (contrastar con el teorema de la convergencia dominada).

18. En el espacio de medida del ejercicio anterior tomamos:

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & 1 \leq k \leq n \\ 0 & k > n, \end{cases}$$

con $f(k) = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que f_n converge uniformemente a f mientras que f no es integrable.

19. Supongamos que $\mu(X) < +\infty$ mientras f_n una sucesión de funciones medibles e integrables en X que converge uniformemente a una función f . Probar que f es integrable y $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

20. Sean f, g funciones medibles. Probar que f, g son integrables si la función $\sqrt{f^2 + g^2}$ lo es. Probar que fg es integrable si f^2, g^2 lo son.

21. Sea $\mu(X) < +\infty$. Probar que una sucesión de funciones medibles $f_n \rightarrow 0$ en medida si y sólo si:

$$\int \left\{ \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} \right\} d\mu \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

22. Sea X un espacio de medida finita. Para $\bar{f}, \bar{g} \in L^1(X)$ se define:

$$d(\bar{f}, \bar{g}) = \int \left\{ \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \right\} d\mu.$$

Demostrar que $L^1(X)$ es completo con esta métrica.

23. Sea $f \geq 0$ medible en $\mathbb{R}$ con $\int_{(0,\infty)} f(x) dx < \infty$. Probar que:

$$g(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-tx} f(x) dx \quad (0 < t < \infty),$$

es diferenciable y que:

$$g'(t) = - \int_{(0,\infty)} x e^{-tx} f(x) dx.$$

24. Sea f_n una sucesión de funciones integrables. Demuéstrese que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en casi todo punto a una función integrable f y:

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

25. Sea f_n una sucesión de funciones integrables no negativas de la que se sabe que la serie $\sum f_n$ es una función integrable. Pruébese que:

$$\sum \int f_n d\mu < \infty.$$

26. Sean f_n, f funciones integrables tales que $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ para casi todo $x \in X$. Entonces:

$$\int \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu \leq \overline{\lim} \int f_n d\mu \leq \int \overline{\lim} f_n d\mu.$$

Extiéndase el resultado al caso en que $|f_n(x)| \leq f(x)$ para casi todo $x \in X$.

27. Sean $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \subset E_{n+1}$ para cada n y $f \geq 0$ medible. Demuéstrese que:

$$\int f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu.$$

Nótese que en algunos casos el valor de la integral en el primer miembro podría ser ∞ .

28. Sea $f \geq 0$ medible y

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq n \\ n & f(x) > n. \end{cases}$$

Pruébese que $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$ (la integral del primer miembro podría ser ∞ en algunos casos).

29. Sean $f_1, \dots, f_k$ funciones integrables. Probar que $\max\{f_1, \dots, f_k\}$ es también integrable.
30. Dése un ejemplo donde se satisfaga el Lema de Fatou con la desigualdad estricta.
31. Sea f una función real definida en un espacio de medida finita. Defínase:

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu \left[\left\{ x : \frac{k}{2^n} < f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \right\} \right] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si f es integrable cada serie es convergente y

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (1)$$

Recíprocamente, si para algún n la serie s_n converge absolutamente entonces f es integrable y se verifica (1).

Indicación. Si f no negativa e integrable aplíquese el teorema de la convergencia monótona a la sucesión $f_n(x) = k/2^n$ si:

$$\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Si $f \geq 0$ y una de las series, por ejemplo s_n , es convergente, úsese entonces la desigualdad $f(x) \leq f_n(x) + 1/2^n$.

32. Denotemos por $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, más brevemente $L^\infty(X)$ ó L^∞ , las clases de equivalencia $\bar{f} = \{g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : \text{medible, } g = f \text{ para casi todo } x \in X\}$ donde f es medible y esencialmente acotada. Demuéstrese que $L^\infty(X)$ es un espacio métrico completo con la distancia:

$$d(\bar{f}, \bar{g}) = d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Capítulo 4

La integral de Riemann

4.1. La integral de Riemann en $\mathbb{R}$

Para el siguiente tema es muy recomendable disponer del capítulo de integración de Riemann y Riemann-Stieltjes del libro de T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Editorial Reverté. En lo que sigue denotaremos la integral de Riemann como $\int_a^b f(x) dx$, designando $\int_{[a,b]} f(x) dx$ la integral de Lebesgue.

Una partición π de $[a, b]$ es una sucesión finita de puntos $\{x_0, \dots, x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Llamaremos $\mathcal{P}$ al conjunto de todas las particiones. La norma $|\pi|$ de una partición denota $|\pi| = \max(x_i - x_{i-1})$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\pi \in \mathcal{P}$ representamos por s_π, S_π y σ_π a las cantidades:

$$s_\pi = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad S_\pi = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

donde $m_i = \inf_{I_i} f$, $M_i = \sup_{I_i} f$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, mientras

$$\sigma_\pi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

donde los $\xi_i \in I_i$. Los números s_π, S_π se llaman sumas inferior y superior de Riemann (asociadas a π) mientras σ_π es una suma de Riemann asociada a π .

Propiedad 4.1. *Sea f una función acotada en $[a, b]$, $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$. Entonces:*

- a) $s_\pi \leq \sigma_\pi \leq S_\pi$,
- b) $\pi \subset \pi'$ implica $s_\pi \leq s_{\pi'} \leq S_{\pi'} \leq S_\pi$.
- c) $|s_\pi|, |\sigma_\pi|, |S_\pi|$ están acotados por $M(b-a)$
- d) Dada una partición $\pi_0 \in \mathcal{P}$ entonces:

$$\sup_{\pi \in \mathcal{P}} s_\pi = \sup_{\pi \in \mathcal{P}, \pi \supset \pi_0} s_\pi,$$

y

$$\inf_{\pi \in \mathcal{P}} S_{\pi} = \inf_{\pi \in \mathcal{P}, \pi \supset \pi_0} S_{\pi}.$$

Definición 4.2. Se dice que f , una función acotada, es integrable Riemann en $[a, b]$ si existe un número $s \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi_{\varepsilon} \in \mathcal{P}$ tal que

$$|\sigma_{\pi} - s| \leq \varepsilon$$

para toda $\pi \supset \pi_{\varepsilon}$, donde σ_{π} es cualquier suma de Riemann asociada a π . Al número s se le denomina la integral de f en $[a, b]$ y se representa como:

$$s = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Definición 4.3. Si f es una función acotada en $[a, b]$ se define la integral inferior (de Riemann) de f como:

$$\underline{s} = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} s_{\pi},$$

mientras la integral superior se define como

$$\bar{s} = \inf_{\pi \in \mathcal{P}} s_{\pi},$$

Observación 4.1. Los números $\underline{s}$, $\bar{s}$ siempre existen y cumplen:

$$m(b-a) \leq \underline{s} \leq \bar{s} \leq M(b-a),$$

donde $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$.

Teorema 4.4. Sea f una función acotada en $[a, b]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a) f es integrable Riemann en $[a, b]$ con integral s .
- b) Las integrales inferior y superior coinciden $\underline{s} = \bar{s}$.
- c) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\pi_{\varepsilon} \in \mathcal{P}$ tal que:

$$0 \leq S_{\pi} - s_{\pi} \leq \varepsilon$$

para toda $\pi \supset \pi_{\varepsilon}$.

Observaciones 4.2.

- 1) En el caso b), el valor s de la integral de Riemann es $s = \underline{s} = \bar{s}$.
- 2) Se dice que una función acotada f en $[a, b]$ es integrable Darboux si $\underline{s} = \bar{s}$. El teorema afirma que la integrabilidad Darboux coincide con la integrabilidad en sentido de Riemann.
- 3) En la literatura se conoce a c) como el criterio de integrabilidad de Riemann ([2]).

La definición que hemos dado de integral de Riemann se expresa en el lenguaje de las redes (ver por ejemplo [18]). La que sigue es una variante equivalente.

Teorema 4.5. *Sea f una función acotada en $[a, b]$. f es integrable Riemann si y sólo si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que para toda sucesión π_n en $\mathcal{P}$ cumpliendo $|\pi_n| \rightarrow 0$ se tiene que:*

$$\lim \sigma_{\pi_n} = s, \quad (4.1)$$

en donde para cada n , σ_{π_n} designa cualquier suma de Riemann asociada a π_n .

Demostración. La condición (4.1) implica que

$$\lim s_{\pi_n} = \lim S_{\pi_n} = s,$$

para toda sucesión π_n en $\mathcal{P}$ cumpliendo $|\pi_n| \rightarrow 0$. Si

$$s - \varepsilon \leq s_{\pi_{n_0}} \leq S_{\pi_{n_0}} \leq s + \varepsilon,$$

para algún n_0 , está claro que

$$s - \varepsilon \leq s_{\pi} \leq S_{\pi} \leq s + \varepsilon,$$

para toda $\pi \supset \pi_{n_0}$. Por tanto $\underline{s} = \bar{s} = s$ y f es integrable Riemann.

Supongamos ahora que f es integrable Riemann y probemos que se cumple (4.1). Por tanto sea π_n cualquier sucesión de particiones cumpliendo $|\pi_n| \rightarrow 0$. Hemos de probar (4.1). Como f es integrable Riemann dado ε se tendrá

$$s - \varepsilon \leq \sigma_{\pi} \leq s + \varepsilon$$

para cualquier $\pi \supset \pi_{\varepsilon}$ para cierta $\pi_{\varepsilon} = \{y_0, \dots, y_{N+1}\}$.

Tomemos $l = \min \Delta y_j$. Para cualquier $\pi_n = \{x_0, \dots, x_{M+1}\}$ con $|\pi_n| < l$ se tiene que en el grupo de intervalos $I_1, \dots, I_{N+1}$, hay exactamente N , denotados $J_1, \dots, J_N$, que cumplen

$$y_k \in J_k.$$

Por tanto,

$$\sigma_{\pi_n} = \sum f(t'_i) \Delta x'_i + \sum f(t_j) \lambda(J_j^+) + f(t_j) \lambda(J_j^-),$$

donde la primera suma está extendida a los intervalos I_i que no cortan a π_{ε} y J_j^+ representa la parte de J_j donde yace t_j .

Por consiguiente:

$$\sigma_{\pi_n} = \sigma_{\pi_n \cup \pi_{\varepsilon}} + \sum (f(t_j) - f(y_j)) \lambda(J_j^-).$$

Al estar f acotada y ser $|\sigma_{\pi_n}| \rightarrow 0$ resulta que

$$\sigma_{\pi_n} = \sigma_{\pi_n \cup \pi_{\varepsilon}} + \zeta_n,$$

con $\zeta_n \rightarrow 0$. Por tanto

$$\lim \sigma_{\pi_n} = s.$$

□

Observación 4.3. Algunas veces (4.1) se expresa escribiendo

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi = s.$$

Definición 4.6. La oscilación ω de una función acotada f en $[a, b]$ se define como:

$$\omega = M - m = \sup_{[a, b]} f - \inf_{[a, b]} f.$$

Proposición 4.7. La oscilación ω de una función acotada f en $[a, b]$ se puede representar como:

$$\omega = \sup_{y, z \in [a, b]} f(y) - f(z) = \sup_{y, z \in [a, b]} |f(y) - f(z)|.$$

Demostración. Se tiene que $f(y) - f(z) \leq M - m$ mientras $f(y_n) \rightarrow M$, $f(z_n) \rightarrow m$ para sucesiones y_n , z_n en el intervalo $[a, b]$. Por tanto

$$M - m = \lim(f(y_n) - f(z_n)) \quad \Rightarrow \quad \omega = \sup_{y, z \in [a, b]} f(y) - f(z).$$

Por otro lado:

$$|f(y) - f(z)| \leq M - m,$$

mientras $(M - m \geq 0)$

$$M - m = \lim |f(y_n) - f(z_n)| \quad \Rightarrow \quad \omega = \sup_{y, z \in [a, b]} |f(y) - f(z)|.$$

□

Definición 4.8. La oscilación $\omega_f(x)$ de una función acotada f en un punto $x \in [a, b]$ se define como:

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_{f, I_\delta(x)} = \inf_{\delta \rightarrow 0+} \omega_{f, I_\delta(x)},$$

en donde $I_\delta(x) = [x - \delta, x + \delta]$ y $\omega_{f, I_\delta(x)}$ designa la oscilación de f en el intervalo $I_\delta(x)$.

Observación 4.4. No es difícil comprobar que f es continua en un punto x si y sólo si $\omega_f(x) = 0$.

La propiedad que sigue es consecuencia inmediata del criterio de Riemann.

Proposición 4.9. Sea f una función acotada en $[a, b]$. f es integrable Riemann si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $\pi \in \mathcal{P}$ tal que:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon,$$

donde $\omega_k = M_k - m_k$ es la oscilación de f en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de la partición π .

El que sigue es un teorema de Vitali de 1903 (cf. [5]).

Teorema 4.10. *Sea f una función acotada en $[a, b]$ y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de los puntos donde f no es continua. Entonces f es integrable Riemann si y sólo si $\mathcal{D}$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Para la necesidad escribimos $\mathcal{D} = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$ donde E_m es:

$$E_m = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) > \frac{1}{m}\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe π_ε tal que:

$$\sum \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon.$$

Denotemos $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, $1 \leq k \leq n$ los interiores de los intervalos de la partición. Notamos que:

$$\lambda^*(E_m) = \lambda^*(E_m \cap (I_1 \cup \cdots \cup I_n)).$$

Si $I_{i_1}, \dots, I_{i_s}$ son los intervalos que cortan a E_m resulta que:

$$\frac{1}{m} \lambda^*(E_m) \leq \frac{1}{m} (\lambda(I_{i_1}) + \cdots + \lambda(I_{i_s})) \leq \sum \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon.$$

Luego $\lambda^*(E_m) = 0$ y $\mathcal{D}$ tiene medida cero.

Probamos ahora la integrabilidad de f cuando $\lambda^*(\mathcal{D}) = 0$. En efecto $\mathcal{D} \subset \cup I_n$, donde los I_n son intervalos abiertos tales que:

$$\sum \lambda(I_n) < A\varepsilon.$$

Por otro lado, cada punto x de continuidad de f es centro de un intervalo abierto I'_n en donde la oscilación ω de f cumple $\omega \leq B\varepsilon$. Como la familia $\{I_n, I'_n\}$ cubre $[a, b]$ admite un subrecubrimiento finito con el que formamos una partición de intervalos I''_n .

Por tanto:

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k = \sum_{k \in F_1} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k \in F_2} \omega_k \Delta x_k \leq A(M - m)\varepsilon + B(b - a)\varepsilon,$$

donde F_1 designa los índices de aquellos intervalos de la partición contenidos en algún intervalo I_n de la primera familia, F_2 designa los índices de los restantes intervalos. Tomando:

$$A = \frac{1}{2(M - m)} \quad B = \frac{1}{2(b - a)},$$

conseguiamos:

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon.$$

Por tanto, f es integrable en $[a, b]$. □

El siguiente resultado justifica la inclusión del presente capítulo en la asignatura.

Teorema 4.11. *Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$. Si f es integrable Riemann entonces f es integrable Lebesgue y las integrales coinciden:*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu,$$

en donde μ representa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Demostración. En primer lugar, f es medible. Para $G \subset \mathbb{R}$ abierto:

$$f^{-1}(G) = \mathcal{D} \cap f^{-1}(G) + \mathcal{C} \cap f^{-1}(G),$$

donde $\mathcal{C} = [a, b] \setminus \mathcal{D}$. El conjunto $\mathcal{C}$ es medible y como $\mathcal{C} \cap f^{-1}(G)$ es abierto en $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} \cap f^{-1}(G) = G_1 \cap \mathcal{C},$$

con G_1 un abierto de $\mathbb{R}$. Así, $\mathcal{C} \cap f^{-1}(G)$ también es medible y f es medible.

Asimismo, f es integrable Lebesgue por ser acotada. Dado ε :

$$s - \varepsilon \leq s_\pi = \int_{(a,b)} \sum_k (m_k \chi_{I_k}) \, d\mu \leq \int_{(a,b)} f \, d\mu$$

donde los I_k representan los intervalos abiertos de la partición π_ε para la que:

$$\sum \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon,$$

y s es la integral de Riemann de f . Por tanto:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_{(a,b)} f \, d\mu,$$

y la otra desigualdad se demuestra igual. □

Observación 4.5. La integral de Riemann, a diferencia de la de Lebesgue, es una integral *orientada* en el sentido que se “integra desde a hasta b ” y cambia de signo cuando se integra en sentido contrario. Es decir, se define:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

cuando $b < a$. Sin embargo, la integral de Lebesgue no es una integral orientada. Se integra simplemente en el intervalo $[a, b]$.

Algunos resultados conocidos, como el que sigue, se demuestran muy fácilmente dentro del marco de la integral de Lebesgue.

Teorema 4.12. *Sea f_n una sucesión de funciones acotadas que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f . Entonces f es integrable Riemann y*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

4.2. El teorema de Peano

Vamos a usar las ideas del capítulo anterior para probar la siguiente versión del teorema de Peano (véase [7]).

Teorema 4.13. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} f : & [a, b] \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (t, y) & \longmapsto f(t, y) \end{array}$$

continua y acotada, es decir

$$|f(t, y)| \leq M$$

para todo $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Supongamos además que f es creciente en la variable y , es decir

$$y_1 \leq y_2 \quad \Rightarrow \quad f(t, y_1) \leq f(t, y_2).$$

Entonces, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ el problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

posee al menos una solución en $[a, b]$.

Demostración. Tomando $\tilde{y} = y_0 - M(t - a)$, $\hat{y} = y_0 + M(t - a)$ y definiendo

$$T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

como

$$T[y](t) = y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) \, ds,$$

se tiene que:

$$\tilde{y} \leq T[\tilde{y}] \leq T[\hat{y}] \leq \hat{y}.$$

Formamos las sucesiones

$$\tilde{y}_{n+1} = T[\tilde{y}_n] \quad \hat{y}_{n+1} = T[\hat{y}_n],$$

con $\tilde{y}_1 = \tilde{y}$, $\hat{y}_1 = \hat{y}$ y observamos que $\tilde{y}_n$ es creciente, $\hat{y}_n$ es decreciente y que

$$\tilde{y}_n \leq \hat{y}_n.$$

Usando el teorema de la convergencia monótona se concluye que si

$$y_- = \lim \tilde{y}_n, \quad y_+ = \lim \hat{y}_n,$$

entonces $f(t, y_-(t))$ y $f(t, y_+(t))$ son en primer lugar Lebesgue integrables con

$$y_{\pm}(t) = y_0 + \int_{(a,t)} f(s, y_{\pm}(s)) \, ds.$$

Como las $y_{\pm}$ son integrable Riemann el teorema fundamental del cálculo implica $y_{\pm} \in C^1$ mientras:

$$y_{\pm} = T[y_{\pm}].$$

Por tanto, resuelven el problema de valor inicial propuesto. $\square$

Observaciones 4.6.

- a) Puede darse una prueba del Teorema 4.2 únicamente sostenida en la integral de Riemann. Argumentamos como sigue.
- b) Las $\hat{y}_n, \tilde{y}_n$ son lipschitzianas de constante común M por tanto

$$|y_{\pm}(t) - y_{\pm}(s)| \leq M|t - s|,$$

y las $y_{\pm}$ son también lipschitzianas.

- c) Como las $\hat{y}_n, \tilde{y}_n$ son sucesiones monótonas, la continuidad de sus respectivos límites y un teorema de Dini ([14]) que enunciamos a continuación nos llevan a que las convergencias

$$\hat{y}_n \rightarrow y_+ \quad \tilde{y}_n \rightarrow y_-,$$

son uniformes.

- d) Pasando al límite en las relaciones:

$$\tilde{y}_{n+1}(t) = y_0 + \int_a^t f(s, \tilde{y}_n(s)) \, ds, \quad \hat{y}_{n+1}(t) = y_0 + \int_a^t f(s, \hat{y}_n(s)) \, ds,$$

concluimos:

$$y_{\pm} = T[y_{\pm}].$$

Teorema 4.14. Sean X un espacio compacto y $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión monótona de funciones continuas tal que:

$$f_n(x) \rightarrow f(x),$$

para cada $x \in X$, donde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es también una función continua. Entonces el límite precedente es además uniforme.

Demostración. Supongamos que f_n es creciente. Dado $\varepsilon > 0$ la familia:

$$G_n = \{x : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\},$$

constituye un recubrimiento abierto de X tal que $G_n \subset G_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, existe n_{ε} tal que:

$$G_{n_{\varepsilon}} = G_n = X,$$

para $n \geq n_{\varepsilon}$. Esto implica la convergencia uniforme. □

4.3. Integral de Riemann n-dimensional

Los resultados sobre integración de Riemann para funciones de una variable se extienden a funciones acotadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}^N$. Las particiones π de $[a, b]$ se definen

como los productos $\pi_1 \times \cdots \times \pi_N$ de particiones de los intervalos $[a_i, b_i]$. Si $\pi_i = \{x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n_i}^i\}$, $x_0^i = a_i$, $x_{n_i}^i = b_i$ y el s -ésimo intervalo es

$$I_s^i = [x_{s-1}^i, x_s^i]$$

entonces $[a, b]$ se descompone en un total de $n_1 \times \cdots \times n_N$ intervalos I_α , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{1, \dots, n_1\} \times \cdots \times \{1, \dots, n_N\}$

$$I_\alpha = I_{\alpha_1}^1 \times \cdots \times I_{\alpha_N}^N.$$

Las sumas inferior, superior y de Riemann se definen como en una variable:

$$s_\pi = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \lambda(I_{\alpha}) \quad S_\pi = \sum_{\alpha} M_{\alpha} \lambda(I_{\alpha}) \quad \sigma_\pi = \sum_{\alpha} f(t_{\alpha}) \lambda(I_{\alpha}),$$

$m_{\alpha} = \inf_{I_{\alpha}} f$, $M_{\alpha} = \sup_{I_{\alpha}} f$ y $t_j \in I_{\alpha}$.

La caracterización de la integrabilidad Riemann en términos de sumas superiores e inferiores y de Riemann es idéntica a la del caso escalar. En particular, una función f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si el conjunto de sus discontinuidades tiene medida de Lebesgue cero.

Asimismo, las funciones Riemann integrables son integrable Lebesgue y sus integrales coinciden.

Una cuestión más delicada es integrar funciones sobre un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^N$. Tales conjuntos forman una clase restringida en $\mathbb{R}^N$.

Definición 4.15 ([16]). *Un conjunto acotado A de $\mathbb{R}^N$ es medible en sentido de Jordan ¹ si la función característica χ_A es integrable Riemann. En ese caso el contenido de A se define como*

$$c(A) = \int_I \chi_A \, dx,$$

donde I es cualquier intervalo cerrado $I \supset A$.

Observaciones 4.7.

- a) La definición anterior no depende de I . En efecto, la medibilidad Jordan de A sólo depende de que la medida de Lebesgue de ∂A sea cero (ver un poco más adelante). En ese caso, si $A \subset I \cap I'$:

$$\int_I \chi_A \, dx = \int_I \chi_A \, d\lambda = \int_{I \cap I'} \chi_A \, d\lambda = \int_{I'} \chi_A \, d\lambda = \int_{I'} \chi_A \, dx,$$

donde $d\lambda$ es la medida de Lebesgue.

- b) Si A es medible Jordan, A es medible Lebesgue y $c(A) = \mu(A)$.

¹En [16] se introducen la integral de Riemann y el contenido de Jordan en el marco más general de los espacios métricos.

c) Si para una partición π definimos

$$J_i(\pi) = \sum_{I_\alpha \subset A} \lambda(I_\alpha) \quad J_e(\pi) = \sum_{I_\alpha \cap A \neq \emptyset} \lambda(I_\alpha),$$

las cantidades:

$$c_i(A) = \sup_{\pi} J_i(\pi) \quad c_e(A) = \inf_{\pi} J_e(\pi),$$

se llaman contenido interior y exterior, respectivamente, de A . Un conjunto es medible Jordan si sus contenidos interior y exterior coinciden. De hecho, $c_i(A)$ es el supremo de las sumas inferiores de Riemann de χ_A . Se observa que $c_i(A) = 0$ cuando $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. A este respecto conviene observar que un punto puede, en caso extremo, considerarse el producto de intervalos cerrados degenerados.

d) Se comprueba que $c_i(A) = c_i(\overset{\circ}{A})$ y que $c_e(A) = c_e(\overline{A})$. Por tanto las definiciones de contenido exterior e interior de Jordan coinciden con las introducidas en [2]. Para comprobar la primera identidad, resulta obvio que $c_i(\overset{\circ}{A}) \leq c_i(A)$, mientras que la desigualdad contraria se prueba como sigue. Sea π una partición arbitraria. Entonces

$$J_i(\pi, A) = \sum_{I_\alpha \subset A} \lambda(I_\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sum_{I_\alpha \subset A} \lambda(I_{\alpha, \varepsilon})$$

donde $I_{\alpha, \varepsilon}$ se forma con los intervalos $[a_{j-1}^i + \varepsilon, a_j^i - \varepsilon]$. Construimos la partición π_ε , superposición de π con los extremos de los intervalos $I_{\alpha, \varepsilon}$. Éstos últimos están integrados en π_ε , bien directamente, bien como unión de intervalos más pequeños. Como $I_{\alpha, \varepsilon} \subset \overset{\circ}{A}$ resulta:

$$\sum_{I_\alpha \subset A} \lambda(I_{\alpha, \varepsilon}) \leq J_i(\pi_\varepsilon, \overset{\circ}{A}) \leq c_i(\overset{\circ}{A}).$$

Esto prueba la desigualdad deseada.

Proposición 4.16. *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto acotado. Son equivalentes*

- i) *A es medible Jordan.*
- ii) *$\lambda(\partial A) = 0$, donde λ es la medida de Lebesgue N -dimensional.*
- iii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de intervalos abiertos $I_1, \dots, I_n$,*

$$\partial A \subset \cup_{i=1}^n I_i,$$

y

$$\sum_{i=1}^n \lambda(I_i) < \varepsilon.$$

- iv) *$c(\partial A) = 0$.*

Demostración. i) $\Leftrightarrow$ ii) porque ∂A es el conjunto donde χ_A es discontinua.
 ii) $\Rightarrow$ iii) porque al ser A acotado, ∂A es compacto y su carácter de conjunto nulo nos lleva a iii). De hecho ii) $\Leftrightarrow$ iii) pues el recíproco es evidente.
 Para iii) $\Rightarrow$ iv) notamos que:

$$c_e(\partial A) \leq c_e(\cup_{i=1}^n I_i) = c_e(\cup_{i=1}^n \lambda(I_i)) = \lambda(\cup_{i=1}^n I_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(I_i) < \varepsilon,$$

en donde se ha usado que $\partial(\cup_{i=1}^n \lambda(I_i)) \subset \cup_{i=1}^n \partial(\lambda(I_i))$ tiene medida cero. Luego $c(\partial A) = 0$. El recíproco también es inmediato. $\square$

El contenido de Jordan es, entre otras propiedades, finitamente aditivo.

Proposición 4.17. Sean A, B conjuntos medible-Jordan tales que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$. Entonces:

$$c(A \cup B) = c(A) + c(B).$$

Demostración. Es inmediato que la unión de conjuntos medible-Jordan es medible-Jordan. Al escribir integrales de Lebesgue:

$$\int \chi_{A \cup B} = \int \chi_{\overset{\circ}{A}} + \int \chi_{\overset{\circ}{B}} = \int \chi_A + \int \chi_B,$$

pues $A \cup B = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \cup N$ donde N es un conjunto de medida nula. Obsérvese finalmente que la primera y las últimas integrales coinciden con integrales de Riemann. $\square$

Definición 4.18. Si A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, se dice que f es integrable Riemann sobre A si $\bar{f}$, la extensión por 0 de f a $\mathbb{R}^N$, es integrable Riemann en algún intervalo compacto $I \supset A$. En ese caso definimos

$$\int_A f \, dx = \int_I \bar{f} \, dx.$$

Observaciones 4.8.

- a) Ni la integrabilidad de f ni el valor de su integral dependen del intervalo I .
- b) Los conjuntos A candidatos a ser recintos de integración deberían ser tales que, por ejemplo, las funciones acotadas y continuas en A fuesen integrables en A . Al tomar $f = 1$ concluimos que A debe ser medible Jordan.

Se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.19. Sean A medible Jordan y f una función acotada en A . Entonces f es integrable Riemann en A si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero.

Demostración. Se trata de medir las discontinuidades de $\bar{f}$ en I . Llamamos $\mathcal{D}^*$ el conjunto de las discontinuidades de $\bar{f}$ en I , $\mathcal{D}$ el de las discontinuidades de f en A . Tenemos $\mathcal{D}^* \cap (\bar{A})^c = \emptyset$. Así

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^* \cap \partial A + \mathcal{D}^* \cap \overset{\circ}{A} = \mathcal{D}^* \cap \partial A + \mathcal{D} \cap \overset{\circ}{A}$$

Resulta que:

$$\mu(\mathcal{D}^*) = \mu(\mathcal{D}^* \cap \overset{\circ}{A}) = \mu(\mathcal{D} \cap \overset{\circ}{A}) = \mu(\mathcal{D}).$$

□

4.4. Ejercicios

1. Demuéstrese que toda función monótona y acotada f en un intervalo $[a, b]$ es integrable Riemann.
2. Constrúyase una sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrable Riemann en $[0, 1]$ tales que $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para cada $x \in [0, 1]$ de forma que exista el límite puntual $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pero que $f(x)$ no sea integrable Riemann.
3. Sean f y f_n funciones acotadas e integrables Riemann en el intervalo $[0, 1]$ de suerte que $|f_n(x)| \leq K$ para $x \in [0, 1]$. Pruébese que si $f_n \rightarrow f$ para casi todo punto $x \in [0, 1]$ entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

4. Sea f una función acotada en el intervalo $[a, \infty)$ la integral de Riemann impropia $\int_a^\infty f(x) dx$ se define como:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

supuesto que el límite existe. Una tal función f se dice absolutamente integrable en $[a, \infty)$ si $|f|$ es Riemann integrable en $[a, \infty)$ (en sentido impropio).

- a) Pruébese que si f es absolutamente integrable también es integrable.
- b) Pruébese que

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

existe en sentido impropio pero que $\sin x/x$ no es absolutamente integrable en $[a, \infty)$.

- c) Demostrar que si f es absolutamente integrable entonces $f \in L^1(a, \infty)$ y las integrales coinciden:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \int_{(a, \infty)} f(x) \, dx.$$

5. Se dice que f es integrable en $\mathbb{R}$, en sentido impropio si $f \in R[-n, n]$ para todo n y existe el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) \, dx := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

Pruébese que si $|f|$ es integrable en $\mathbb{R}$ (en sentido impropio) entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx.$$

Como muestran los ejemplos de las funciones $f(x) = x$, $\sin x/x$, una función puede ser integrable pero no absolutamente integrable. En ese caso se escribe:

$$\text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) \, dx,$$

en donde v. p. son las siglas de “valor principal”.

6. Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no necesariamente acotada tal que $f \in R[a, b - \varepsilon]$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. f se dice integrable en el intervalo $[a, b)$, en sentido impropio, si existe el límite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx =: \int_a^b f(x) \, dx.$$

Si $|f|$ es integrable en sentido impropio entonces se dice que f es absolutamente integrable.

- a) Pruébese que si f es absolutamente integrable también es integrable.
 b) Demostrar que si f es absolutamente integrable en $[a, b)$ entonces $f \in L^1(a, b)$ y las integrales coinciden:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{(a, b)} f(x) \, dx.$$

7. Sean R el rectángulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ y f una función acotada en R . Sean π_1 una partición $\{x_0 \leq \dots \leq x_n\}$ de $[a, b]$, π_2 , $\{y_0 \leq \dots \leq y_m\}$ una partición de $[c, d]$. Defínanse:

$$M_{ij} = \sup_{I_i \times J_j} f, \quad m_{ij} = \inf_{I_i \times J_j} f$$

con $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, $\pi = \pi_1 \times \pi_2$). Las sumas superior e inferior se definen respectivamente como:

$$S_\pi = \sum_i \sum_j M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s_\pi = \sum_i \sum_j m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Asimismo,

$$\sigma_\pi = \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (\xi_i, \eta_j) \in I_i \times J_j,$$

define una suma de Riemann asociada a π .

La función f es integrable Darboux en R si $\underline{s} = \bar{s}$ donde

$$\underline{s} = \sup_\pi s_\pi \quad \bar{s} = \sup_\pi S_\pi.$$

Análogamente, se dice que f es integrable Riemann si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon \exists \pi_\varepsilon$ con $|s - \sigma_\pi| < \varepsilon$ para toda $\pi \supset \pi_\varepsilon$, donde σ_π es cualquier suma de Riemann asociada a π . En ese caso se pone:

$$s = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx dy.$$

- a) Probar la equivalencia de las dos nociones de integral.
- b) Demuéstrese que si f es integrable Riemann en R entonces es integrable Lebesgue y las respectivas integrales coinciden.
8. [Integral de Riemann–Stieltjes, [2]] Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada que denominaremos el “integrador”. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\pi = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}$ es una partición de $[a, b]$, la expresión:

$$\sigma_\pi = \sum_i f(t_i) \Delta \alpha_i,$$

con $t_i \in I_i$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta \alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, se llama una suma de Riemann de f asociada a π . Se dice que f es Riemann–Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$ (abreviado, $f \in R(\alpha)$) si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon$, $\exists \pi_\varepsilon \in \mathcal{P}$ cumpliendo $|\sigma_\pi - s| < \varepsilon$ para toda $\pi \supset \pi_\varepsilon$, donde σ_π es cualquier suma de Riemann asociada a π . En tal caso se escribe:

$$s = \int_a^b f(x) \, d\alpha.$$

Obviamente, s se llama la integral de Riemann–Stieltjes de f .

Pruébense las siguientes afirmaciones:

- a) Si $f, g \in R(\alpha)$ entonces para constantes arbitrarias $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ y se tiene:

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha.$$

- b) Si α_1, α_2 son acotadas en $[a, b]$, $f \in R(\alpha_i)$, $i = 1, 2$, entonces para constantes cualesquiera $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $f \in R(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)$ y se cumple:

$$\int_a^b f d(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2) = c_1 \int_a^b f d\alpha_1 + c_2 \int_a^b f d\alpha_2.$$

9. Por analogía con la integral de Darboux se introducen los siguientes conceptos asociados a la integral de Riemann-Stieltjes ([2]). Sea α monótona no decreciente y acotada. Para f acotada en $[a, b]$ se definen las sumas superior e inferior asociadas a una partición π :

$$S_\pi = \sum_i M_i \Delta \alpha_i, \quad s_\pi = \sum_i m_i \Delta \alpha_i,$$

$M_i = \sup_{I_i} f$, $m_i = \inf_{I_i} f$, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta \alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$. Las integrales superior e inferior son

$$\bar{s} = \inf_{\pi} S_\pi, \quad \underline{s} = \sup_{\pi} s_\pi.$$

Admitiendo que α es monótona no decreciente, pruébese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- a) $f \in R(\alpha)$,
 b) $\underline{s} = \bar{s}$,
 c) (condición de Riemann) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \pi_\varepsilon$ tal que

$$S_{\pi_\varepsilon} - s_{\pi_\varepsilon} < \varepsilon.$$

10. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Demuéstrese que toda función continua $f \in C[a, b]$ satisface $f \in R(\alpha)$, es decir, es integrable en sentido de Riemann-Stieltjes en $[a, b]$ tomando α como integrador.

11. Sean, f continua y α de variación acotada en $[a, b]$. Demuéstrese que:

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq V(\alpha) \sup_{[a, b]} |f(x)|,$$

donde $V(\alpha)$ es la variación total de α sobre $[a, b]$.

12. Sean f continua en $[a, b]$, α monótona no decreciente en $[a, b]$ y continua por la derecha. Pruébese que:

$$\int_a^b f(x) d\alpha = \int_{(a, b]} f(x) d\mu_\alpha,$$

donde μ_α es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a α .

Capítulo 5

Espacios L^p

5.1. Desigualdades

Definición 5.1. Se dice que una función $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si para $x, y \in (a, b)$ arbitrarios:

$$\varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \quad (5.1)$$

para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Observaciones 5.1.

a) Si φ es convexa y $\{x_1, \dots, x_n\} \subset (a, b)$,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i)$$

para $t_i \geq 0$ cualesquiera tales que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

b) La función φ se dice estrictamente convexa si, en las condiciones de (5.1), se cumple:

$$\varphi((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

siempre que $x \neq y$ y $\lambda \neq \{0, 1\}$.

Propiedad 5.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

b) Para $a < s < t < u < b$ cualesquiera:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s}.$$

c) Para $a < s < t < u < b$ cualesquiera:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

d) Para $a < s < t < u < b$ cualesquiera:

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

Demostración. Escribimos

$$t = s + \lambda(u - s) = (1 - \lambda)s + \lambda u, \quad (5.2)$$

con

$$\lambda = \frac{t - s}{u - s}.$$

Como

$$\varphi(t) \leq (1 - \lambda)\varphi(s) + \lambda\varphi(u), \quad (5.3)$$

entonces

$$\varphi(t) - \varphi(s) \leq \lambda(\varphi(u) - \varphi(s)),$$

que es b).

La relación (5.2) se escribe:

$$t = s + \lambda(u - s) = \mu s + (1 - \mu)u, \quad (5.4)$$

con

$$\mu = 1 - \lambda = \frac{u - t}{u - s}.$$

Siendo

$$\varphi(t) \leq \mu\varphi(s) + (1 - \mu)\varphi(u),$$

entonces

$$\varphi(u) - \varphi(s) \leq \frac{1}{\mu}(\varphi(u) - \varphi(t)),$$

de donde sale d).

Finalmente, la relación (5.3) se escribe:

$$(1 - \lambda)\varphi(t) + \lambda\varphi(t) \leq (1 - \lambda)\varphi(s) + \lambda\varphi(u),$$

por tanto

$$\varphi(t) - \varphi(s) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda}(\varphi(u) - \varphi(t)),$$

que implica c). □

Proposición 5.3. Si $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa entonces φ es continua.

Observaciones 5.2.

- a) Es imprescindible en la propiedad anterior que φ esté definida en un intervalo abierto. En efecto $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tomando el valor 0 en $[0, 1)$ y 1 en $x = 1$ es convexa y no es continua.
- b) Probamos a continuación una propiedad más fuerte que la mera continuidad.

Proposición 5.4. Si $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa entonces φ es derivable por la derecha y por la izquierda en cada $t \in (a, b)$. Además

$$D\varphi(t-) \leq D\varphi(t+)$$

en cada t siendo ambas funciones $D\varphi(t-)$ y $D\varphi(t+)$ crecientes.

Demostración. Elegimos:

$$t < s < u' < u$$

y se cumple que

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \geq \frac{\varphi(u') - \varphi(t)}{u' - t} \geq \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}.$$

Claramente

$$\lim_{u \rightarrow t+} \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} = \inf_{u \rightarrow t+} \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \geq \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}.$$

Así pues:

$$D\varphi(t+) \geq \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}.$$

Si hacemos $t \rightarrow s+$ resulta

$$D\varphi(t+) \geq D\varphi(s+),$$

si por contra $s \rightarrow t-$

$$D\varphi(t+) \geq D\varphi(t-),$$

pues la existencia de la derivada por la izquierda se sigue de un argumento similar. $\square$

Proposición 5.5 (Desigualdad de Jensen). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, f una función real e integrable en X tal que $-\infty \leq a < f(x) < b \leq \infty$, mientras φ es convexa en (a, b) . Entonces:

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi \circ f \, d\mu.$$

Observación 5.3. No se requiere en el enunciado la integrabilidad de $\varphi \circ f$ porque se comprueba en el curso de la demostración que en caso de no integrabilidad ha de ser:

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu = \infty.$$

Demostración. Tomamos

$$t = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f.$$

Sabemos que

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \beta \quad s < t,$$

donde $\beta = D\varphi(t-)$. Como por otra parte $D\varphi(t+) \geq \beta$ también se cumple

$$\varphi(s) - \varphi(t) \geq \beta(s - t) \quad s > t.$$

Concluimos entonces que

$$\varphi \circ f(x) \geq \varphi(t) + \beta(f(x) - t),$$

con lo que al ser $\varphi \circ f$ medible se tiene que o bien es integrable o bien tiene integral infinita. Integrando ambos miembros y dividiendo por $\mu(X)$ obtenemos la tesis. $\square$

Ejemplo 5.4. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ finito $X = \{q_1, \dots, q_n\}$ con $\alpha_i = \mu\{q_i\}$ la desigualdad de Jensen no es más que:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i \varphi(x_i),$$

donde

$$t_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^n \alpha_j} \quad x_i = f(q_i).$$

Tomando por ejemplo $\varphi = e^x$, $x_i = \log y_i$ concluimos:

$$(y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{A}} \leq \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad A = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Observación 5.5. Sean $t_1, \dots, t_n$ no negativos con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, $y_1, \dots, y_n$ no negativos también, entonces:

$$y_1^{t_1} \dots y_n^{t_n} \leq t_1 y_1 + \dots + t_n y_n.$$

Observación 5.6. Si $x_1, \dots, x_n$ son no negativos, los números p_i son positivos y

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1,$$

entonces (*desigualdad de Young*):

$$x_1 \dots x_n \leq \frac{1}{p_1} x_1^{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} x_n^{p_n}.$$

5.1.1. Desigualdades de Hölder y de Minkowski

Definición 5.6. Se dice que dos números positivos p, q son (*exponentes*) *conjugados* si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Como caso límite se dice asimismo que $p = 1$ y $q = \infty$ son conjugados.

Teorema 5.7. Sean $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles, $1 < p < q$ exponentes conjugados. Entonces:

$$\int fg \, d\mu \leq \left(\int f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\mu \right)^{1/q},$$

y

$$\left(\int |f + g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Observación 5.7. La primera desigualdad es la desigualdad de Hölder, la segunda la de Minkowski.

Demostración. Comenzamos con la desigualdad de Hölder y suponemos que las funciones f^p y g^q son integrables (que es el caso relevante). Llamamos $A = \int_X f^p \, d\mu$, $B = \int_X g^q \, d\mu$ y obtenemos, de la desigualdad de Young:

$$\int fg \, d\mu = \int (tf)(t^{-1}g) \, d\mu \leq \frac{1}{p} t^p A + \frac{1}{q} t^{-q} B,$$

para todo $t > 0$. El segundo miembro alcanza un mínimo en $t^{p+q} = B/A$ siendo el valor del mínimo

$$A^{\frac{q}{p+q}} B^{\frac{p}{p+q}} = A^{1/p} B^{1/q}.$$

En cuanto a la desigualdad de Minkowski escribimos:

$$\int |f + g|^{p-1} |f + g| \, d\mu \leq (|f|_p + |g|_p) |f + g|_p^{p-1},$$

en donde suponemos que $|f|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ y $|g|_p$ son finitas y se observa que la potencia q -ésima de $|f + g|^{p-1}$ es finita, donde q es el conjugado de Hölder de p .

□

5.2. Espacios L^p

Definición 5.8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible. Para $0 < p < \infty$ definimos

$$|f|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Denotamos $\mathcal{L}^p(X)$ o $\mathcal{L}^p(\mu)$ el conjunto de las funciones medibles tales que $|f|_p < \infty$. $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}^p(G)$ denotarán respectivamente los correspondientes espacios en $\mathbb{R}^N$ y en un abierto G de $\mathbb{R}^N$ con respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 5.9. Se dice que $M \geq 0$ es una cota esencial de una función medible $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ si:

$$\{x : |f(x)| > M\}$$

tiene medida cero. Definimos el supremo esencial β de una función medible f como el ínfimo de sus cotas esenciales. Lo denotamos por

$$|f|_\infty = \sup \text{esen}_X f.$$

Denotamos $\mathcal{L}^\infty(X)$, $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ (respectivamente $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}^\infty(G)$ en el caso de $\mathbb{R}^N$ o un abierto G de $\mathbb{R}^N$ con la medida de Lebesgue) el conjunto de las funciones medibles esencialmente acotadas.

Observación 5.8. El supremo esencial β es una cota esencial porque al ser:

$$\{|f(x)| > \beta\} = \cup_n \{|f(x)| > \beta + \frac{1}{n}\},$$

el primer miembro tiene medida cero. Por tanto β es ciertamente la menor de las cotas inferiores.

Proposición 5.10. $\mathcal{L}^p(X)$ es un espacio vectorial para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Los casos $p = 1, \infty$ son obvios. Que $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$ si $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ para $p > 1$ se sigue de la convexidad de $\varphi(t) = |t|^p$ para $p \geq 1$. En efecto:

$$\left(\frac{|x| + |y|}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p$$

de donde

$$(|x| + |y|)^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

□

Observaciones 5.9.

- a) Si f, g son funciones medibles tales que $f(x) = g(x)$ en casi todo punto entonces $|f|_p = |g|_p$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. En $\mathcal{L}^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, se define la relación (de equivalencia) $f \sim g$ si $f(x) = g(x)$ para c. t. $x \in X$. El correspondiente cociente $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ será representado por $L^p(X)$. Si $[f]$ es una clase, $|[f]|_p$ se define como $|f|_p$. En virtud de la desigualdad de Minkowski se tiene que $|\cdot|_p$ es una norma en $L^p(X)$.
- b) $L^p(X)$ también es un espacio vectorial si $0 < p < 1$ (Ejercicio 2). Sin embargo, el funcional $|\cdot|_p$ no define en este caso una norma (Ejercicios 5, 6 y [10]). No obstante, $L^p(X)$ es un espacio métrico completo si se le dota de la distancia:

$$d(f, g) = \int |f - g|^p d\mu.$$

Nos remitimos al Ejercicio 7.

Teorema 5.11. $(L^p(X), |\cdot|_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Si f_n es una sucesión de Cauchy en $L^p(X)$ –prescindimos de la notación de las clases y trabajamos directamente con funciones– es inmediato comprobar que f_n es de Cauchy en medida. Por tanto existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ en medida. De f_n extraemos una sucesión f_{n_k} tal que que

$$f_{n_k} \rightarrow f$$

en casi todo punto. Fijamos n y se tiene:

$$\liminf \int |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \leq \varepsilon.$$

si $n \geq n_\varepsilon$. El lema de Fatou afirma entonces que

$$\int |f - f_n|^p d\mu = \int \liminf |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \leq \varepsilon$$

si $n \geq n_\varepsilon$. Esto significa que $f - f_n \in L^p(X)$ y por tanto que $f \in L^p(X)$. Además que $f_n \rightarrow f$ en $L^p(X)$. $\square$

Teorema 5.12. $(L^\infty(X), |\cdot|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea f_n una sucesión de Cauchy en $L^\infty(X)$. Entonces, para todo k existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto:

$$F_k = \cup_{m \geq n \geq n_k} \{|f_m(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k}\}$$

tiene medida cero. Ponemos $F_0 = \cup_{n=1}^\infty \{|f_n(x)| > |f_n|_\infty\}$ y definimos $F = F_0 \cup \cup_{k=1}^\infty F_k$. Resulta entonces que F tiene medida cero y fijamos $E = X \setminus F$.

Si damos un k arbitrario se tiene entonces, por construcción, que $E \subset F_k^c$. Por tanto:

$$\sup_E |f_m - f_n| \leq \frac{1}{k}$$

para $m \geq n \geq n_k$. Por tanto $f_n \rightarrow f$ uniformemente en E . La función f es medible en E y su extensión por 0 a X también es medible en X . Además f acotada en E por ser límite uniforme de funciones acotadas en E . En efecto $\sup_E |f_n| \leq |f_n|_\infty$. Como:

$$\sup \operatorname{esen}_X |f| \leq \sup_E |f|$$

pues el segundo miembro define una cota esencial f , $f \in L^\infty(X)$.

Además

$$\sup \operatorname{esen}_X |f_n - f| \leq \sup_E |f_n - f|.$$

ya que el segundo miembro define una cota esencial de $f_n - f$. Así $f_n \rightarrow f$ en $L^\infty(X)$. $\square$

Observación 5.10. Se sigue de los enunciados precedentes que si $f_n \rightarrow f$ en $L^p(X)$ entonces f es el límite en casi todo punto y casi-uniformemente de una subsucesión f_{n_k} .

Si $f_n \rightarrow f$ en $L^\infty(X)$ entonces $f_n \rightarrow f$ uniformemente en el complemento de un conjunto de medida cero.

5.3. Contenidos

En general, no se dan relaciones de contenido entre los L^p si $\mu(X) = \infty$. Por contra, si $\mu(X) < \infty$ los espacios se hacen más pequeños a medida que p crece (p se convierte en una especie de medida de la regularidad de la función).

Para ilustrar la primera afirmación consideramos $X = (1, \infty)$. La función:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \in L^p(1, \infty) \quad \Leftrightarrow \quad p\alpha > 1.$$

Si $1 \leq q < p$ podemos encontrar α tal que:

$$q \leq \frac{1}{\alpha} < p.$$

Así, en general, $L^p(X) \not\subset L^q(X)$ si $1 \leq q < p$.

Por otra parte tomamos:

$$g_\alpha = \frac{\chi_{(1,2)}}{(x-1)^\alpha},$$

$g_\alpha \in L^p(1, \infty)$ si y sólo si $p < 1/\alpha$. Luego si $p < q$ y siempre podemos elegir un α tal que:

$$p < \frac{1}{\alpha} \leq q,$$

y $g_\alpha \in L^p(1, \infty) \setminus L^q(1, \infty)$, luego $L^p(X) \not\subset L^q(X)$ si $p < q$.

Consideramos ahora dos resultados de contenido. Uno relativo al caso $\mu(X) < \infty$, el otro para X general.

Teorema 5.13. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$. Entonces*

$$L^p(X) \subset L^q(X)$$

para $1 \leq p < q \leq \infty$ con:

$$|f|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |f|_q,$$

para todo $f \in L^q(X)$.

La prueba es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder.

Teorema 5.14. *Sean X de medida finita, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ medible. Entonces*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\mu(X)} \int f^p d\mu \right)^{1/p} = \lim_{p \rightarrow \infty} |f|_p = \sup \text{ esen } f.$$

En particular, f está acotada esencialmente si y solamente si tal límite es finito.

Demostración. Como:

$$a_p := \left(\frac{1}{\mu(X)} \int f^p d\mu \right)^{1/p}$$

es creciente en p existe $A = \lim_{p \rightarrow \infty} a_p = \sup a_p$. Siendo $a_p = f_p/(\mu(X)^{1/p})$, $\lim |f|_p = A$ ($A = \infty$ no está descartado).

Supongamos A finito. De la desigualdad de Tchebycheff resulta:

$$\mu\{|f(x)| \geq m\} \leq \mu(X) \left(\frac{A}{m} \right)^p,$$

para todo $m > 0$ y $p \geq 1$. Por tanto el conjunto de la izquierda tiene medida cero para $m > A$. De aquí $|f|_\infty \leq A$. Asimismo, no puede ser $|f|_\infty \leq A - \varepsilon$ pues, como se comprueba fácilmente, esto implicaría que $\lim a_p \leq A - \varepsilon$.

Finalmente, $A = \infty$ es incompatible con que f sea acotada. $\square$

Teorema 5.15. *Supongamos que $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ con $p < q$. Entonces $f \in L^r(X)$ para todo $p < r < q$ y además:*

$$|f|_r^r \leq |f|_p^{(1-\theta)p} |f|_q^{\theta q},$$

donde $r = (1 - \theta)p + \theta q$.

5.4. Densidad

Teorema 5.16 (De la convergencia dominada). *Sea $f_n \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ una sucesión de funciones tales que:*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para c. t. $x \in X$ donde $g \in L^p(\Omega)$ mientras

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

en casi todo punto siendo f una función medible. Entonces $f \in L^p(\Omega)$ y $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Que $f \in L^p$ se sigue de que $|f_n|^p \rightarrow |f|^p$ para c. t. $x \in X$, mientras

$$|f_n|^p \leq g^p.$$

Esto prueba la integrabilidad de $|f|^p$. Para la convergencia notamos que $|f_n - f| \rightarrow 0$ para c. t. $x \in X$, junto con

$$|f_n - f|^p \leq 2^p g^p,$$

de donde $\int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 5.17 (Densidad de las funciones simples). *Sea $\mathcal{S}(X)$ el espacio de las funciones simples e integrales en X . Entonces $\mathcal{S}(X)$ es denso en $L^p(X)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Tomamos $f \in L^p(X)$ y suponemos primero que $f \geq 0$. Entonces

$$f(x) = \lim f_n(x)$$

en c. t. $x \in X$, con $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ siendo $f_n \in \mathcal{S}(X)$.

Ahora

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = |f(x) - f_n(x)| \leq f.$$

Como $f \in L^p(X)$ entonces $f - f_n \rightarrow 0$ en $L^p(X)$.

Para f general escribimos

$$f = f^+ - f^-,$$

observamos que $f^\pm \in L^p(X)$ y aplicamos la conclusión precedente. $\square$

Proposición 5.18. *En $\mathbb{R}^N$ considera la familia de intervalos $\mathcal{F} = \cup \mathcal{F}_k$ donde*

$$\mathcal{F}_k = \{2^{-k}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + 2^{-k}[\bar{0}, \bar{1})^n : \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^n\},$$

$\bar{0} = (0, \dots, 0)$, $\bar{1} = (1, \dots, 1)$. Entonces todo abierto G de $\mathbb{R}^N$ se puede escribir como una unión disjunta

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$$

de intervalos I_n de $\mathcal{F}$.

Teorema 5.19. *Para $G \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $1 \leq p < \infty$, $L^p(G)$ es separable.*

Demostración. Probamos la afirmación en $\mathbb{R}^N$. Si E es medible con medida finita, para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $G \supset E$ tal que

$$|\chi_E - \chi_G|_p \leq \varepsilon.$$

De la proposición anterior, dado un abierto G y $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $\{I_1, \dots, I_n\}$ de intervalos de la familia $\mathcal{F}$ (Proposición 5.18) tal que

$$|\chi_G - (\chi_{I_1} + \dots + \chi_{I_n})|_p \leq \varepsilon.$$

La conclusión final es entonces que toda función simple en $\mathbb{R}^N$ se puede aproximar por una combinación lineal, con coeficientes racionales, de funciones χ_I donde los I son los intervalos de la familia $\mathcal{F}$. Es decir $\{q_1 \chi_{I_1} + \dots + q_n \chi_{I_n} : q_i \in \mathbb{Q}, I_i \in \mathcal{F}\}$ es densa en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Es inmediato comprobar que las restricciones de dichas funciones a cualquier abierto G de $\mathbb{R}^N$ conforman un conjunto denso en $L^p(G)$. $\square$

Observación 5.11. El espacio $L^\infty(X)$ no es separable. Esto se prueba a continuación para un abierto G de $\mathbb{R}^N$. La prueba procede de [4].

Proposición 5.20. Sea $G \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. El espacio $L^\infty(G)$ no es separable.

Demostración. Para cada punto $\xi \in G$ tomamos una bola $B_\xi = B(\xi, r) \subset G$ y definimos $f_\xi = \chi_{B_\xi}$. Definimos asimismo $U_\xi = \{f \in L^\infty(G) : |f - f_\xi|_\infty < \frac{1}{2}\}$.

Lo primero que se observa es que $U_{\xi_1} \cap U_{\xi_2} = \emptyset$ si $\xi_1 \neq \xi_2$ (los conjuntos U_ξ son abiertos no vacíos de $L^\infty(G)$). Entonces $\{U_\xi\}$ constituye una familia no numerable de abiertos no vacíos que son disjuntos dos a dos. Esto es incompatible con la separabilidad del espacio. $\square$

Definición 5.21. Para $G \subset \mathbb{R}^N$ se define $C_c(G)$ el espacio de las funciones continuas con soporte compacto contenido en G .

Teorema 5.22. Para cada $G \subset \mathbb{R}^N$ el espacio $C_c(G)$ es denso en $L^p(G)$ con $1 \leq p < \infty$.

Observación 5.12. El teorema muestra que $L^1(G)$ es la completación de $C_c(\mathbb{R}^N)$ con la norma de L^1 expresada en términos de la integral de Riemann. Por este procedimiento se puede introducir directamente la integral de Lebesgue sin apelar a la teoría de la medida.

Proposición 5.23 (Lema de Uryshon). Sea (X, d) un espacio métrico, $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos de X . Existe entonces una función continua $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi = 1$ en A , $\varphi = 0$ en B . Más exactamente $\{\varphi = 1\} = A$ y $\{\varphi = 0\} = B$.

Demostración. Basta tomar:

$$\varphi(x) = \frac{d(x, B)}{d(x, B) + d(x, A)}$$

donde $d(x, A) = \text{dist}(x, A)$. Resulta entonces que $A = \{\varphi = 1\}$, $B = \{\varphi = 0\}$. $\square$

Demostración del Teorema 5.22. Comenzamos con el caso de $\mathbb{R}^N$. Si se procede como en la prueba del Teorema 5.19 vemos que es suficiente con aproximar cada función χ_I con I de la familia $\mathcal{F}$ por una función de $C_c(\mathbb{R}^N)$.

Dado $\eta > 0$ y un intervalo I de la familia se consideran $A = \bar{I}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, I) \geq \eta\}$. Se usa el Lema de Uryshon siendo $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ la correspondiente función. Entonces

$$|\chi_I - \varphi|_p \leq (\mu\{0 < \text{dist}(x, I) < \eta\})^{1/p} \rightarrow 0$$

cuando $\eta \rightarrow 0$. Esto prueba el resultado en $\mathbb{R}^N$.

En cuanto al caso de un abierto G , escribimos

$$G = \bigcup G_n$$

donde G_n es una sucesión de abiertos $G_n \subset \bar{G}_n \subset G_{n+1}$, $\bar{G}_n$ compacto. Si $f \in L^p(G)$ y $f_n = \chi_{G_n} f$ entonces $f_n \rightarrow f$ en $L^p(G)$ (teorema de la convergencia

dominada). Basta aproximar f_n por funciones de $C_c(G)$. Se extiende f_n por cero fuera de G y para $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|f_n - \varphi|_{p,G} \leq |f_n - \varphi|_{p,\mathbb{R}^N} \leq \varepsilon.$$

En particular

$$|f_n - \varphi|_{p,G_n} + |\varphi|_{p,G \setminus G_n} \leq \varepsilon.$$

Ahora se usa el lema de Uryson para tener $\eta(x)$ continua, $\eta = 1$ en $\overline{G}_n$, $\eta = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus G_{n+1}$. Claramente $\eta\varphi \in C_c(G)$ y

$$|f_n - \eta\varphi|_{p,G} = |f_n - \varphi|_{p,G_n} + |\eta\varphi|_{p,G \setminus G_n} \leq |f_n - \varphi|_{p,G_n} + |\varphi|_{p,G \setminus G_n} \leq \varepsilon.$$

Por consiguiente, hemos terminado. $\square$

Observación 5.13. Argumentamos de otra forma. Si $f \in L^p(\Omega)$ a su extensión por cero fuera de G , f , que está en $L^p(\mathbb{R}^N)$, la aproximamos por φ continua en $\mathbb{R}^N$ (de soporte compacto, de hecho), luego

$$|f - \varphi|_{p,G} \leq |\bar{f} - \varphi|_{p,\mathbb{R}^N} < \varepsilon.$$

Recurrimos ahora a la sucesión G_n y a la función ψ_n que es uno en $\overline{G}_n$ y cero fuera de G_{n+1} . Resulta obvio que:

$$|\varphi_n| \leq |\varphi|, \quad \varphi_n \rightarrow \varphi.$$

donde $\varphi_n = \psi_n \varphi \in G_c(G)$. Luego $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $L^p(G)$. Esto significa que φ_n está próxima a f en $L^p(G)$ mientras que φ_n tiene soporte compacto.

Supongamos que f es medible en $\mathbb{R}^N$ y para $h \in \mathbb{R}^N$ definimos la función:

$$f_h(x) = f(x + h).$$

Es inmediato comprobar que el conjunto de puntos x donde $f_h(x) \rightarrow f(x)$ cuando $h \rightarrow 0$ es precisamente el conjunto donde f es continua. Sin embargo, como muestra en $\mathbb{R}$ la función $\chi_{\mathbb{Q}}$, dicho conjunto puede ser vacío ($\chi_{\mathbb{Q}}$ es incluso integrable). No obstante, si $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$ entonces $f_h \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.24. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Entonces,

$$|f_h - f|_p \rightarrow 0,$$

cuando $h \rightarrow 0$.

Demostración. Tomamos $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ y tenemos:

$$|f_h - f|_p \leq C(2|f - g|_p + |g_h - g|_p),$$

pues $|g_h - f_h|_p = |f - g|_p$. Se puede elegir g tal que $|f - g|_p < \frac{\varepsilon}{4C}$. Fijada esa g resulta que los soportes de g y g_h están en un intervalo I para $|h| < h_0$. De la continuidad uniforme de g se deduce que $|g_h - g|_\infty < \eta$ para $|h| < h_\eta := \min\{h_0, \delta\}$. Luego

$$|g_h - g|_p < \lambda_n(I)^{1/p} \eta.$$

Basta elegir η convenientemente para concluir que $|f_h - f|_p < \varepsilon$ para $|h| < h_\eta$. $\square$

5.5. Ejercicios

1. ([10]) Sea $\varphi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ no decreciente. Se define:

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Pruébese que Φ es convexa.

2. Demostrar que $\mathcal{L}^p(X)$ es un espacio vectorial si $0 < p < 1$.
 3. Estudiar bajo qué condiciones es cierto que

$$xy = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

donde x, y son positivos y p, q son exponentes conjugados. Para f, g funciones integrables no negativas caracterizar cuándo se da la igualdad en la desigualdad de Hölder

$$\int fg d\mu \leq \left(\int f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu \right)^{1/q}.$$

4. Sean f, g funciones medibles y no negativas tales que (igualdad en la desigualdad de Minkowski):

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

¿Qué se puede decir de f y de g ?

5. [Desigualdad de Hölder inversa]. Para $0 < p < 1$ se consideran funciones medibles y no negativas f, g tales que $\int f^p d\mu$ y $\int g^q d\mu$ son finitas, donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nótese que $q = \frac{p}{p-1} < 0$. Se supone además que $\int g^q d\mu > 0$. Demuéstrese que:

$$\int fg d\mu \geq \left(\int f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Indicación. Escribese $f^p = (fg)^p g^{-p}$ y utilícese la desigualdad de Hölder.

6. Se supone $0 < p < 1$ y se consideran funciones no negativas $f, g \in L^p(X)$. Demuéstrese que:

$$\left(\int (f + g)^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int f^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu \right)^{1/p}.$$

7. Probar que cuando $0 < p < 1$, $L^p(X)$ es un espacio métrico completo si se le dota de la distancia:

$$d(f, g) = \int |f - g|^p d\mu.$$

8. ([10]) Constrúyase un ejemplo de $f \in L^p(X)$ tal que $f \notin L^{p+\delta}(X)$ para $\delta > 0$. Análogamente, dése un ejemplo de $f \in L^p(X)$ tal que $f \notin L^{p-\delta}(X)$ para $\delta > 0$.

Indicación. Obsérvese que $\sum \frac{2^{n\delta}}{n^2}$ diverge para $\delta > 0$.

9. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_i : X \rightarrow [0, \infty]$, $i = 1, \dots, m$, funciones medibles, $f_i(x) \neq 0$ en en casi todo punto. Si $p_1, \dots, p_m > 0$ son exponentes conjugados:

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

pruébese que

$$\int f_1 \dots f_m d\mu \leq \left(\int f_1^{p_1} d\mu \right)^{1/p_1} \dots \left(\int f_m^{p_m} d\mu \right)^{1/p_m}.$$

10. Probar la desigualdad de Hölder dicreta:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

siendo $p, q > 1$ exponentes conjugados, mientras los números x_i, y_i son todos no negativos.

11. Probar la desigualdad de Minkowski dicreta:

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}$$

siendo no negativos los números x_i, y_i .

12. Sean $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m$ funciones de $L^p(X)$. Pruébese que:

$$\left(\sum_{i=1}^m \int |f_i + g_i|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^m \int |f_i|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m \int |g_i|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Indicación. Usar el Teorema de Fubini.

13. Sean f_n, g_n sucesiones en $L^p(X)$ y $L^q(X)$ respectivamente, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tales que $f_n \rightarrow f$ en $L^p(X)$ y $g_n \rightarrow g$ en $L^q(X)$. Pruébese que $f_n g_n \rightarrow fg$ en $L^1(X)$.

Capítulo 6

Medidas producto. Teorema de Fubini

6.1. Medidas producto

Se consideran dos espacios de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. La clase de los rectángulos medibles en $X \times Y$ se define como

$$\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

La σ -álgebra producto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ denotada por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es la σ -álgebra generada por la clase de los rectángulos $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$, es decir

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \mathcal{S}_a(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}).$$

El objetivo de la presente sección es construir la medida producto $\mu \times \nu$ sobre la σ -álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ cuando μ y ν son σ -finitas.

A lo largo del capítulo denotamos por $\mathcal{L}(n)$, $\mathcal{B}(n)$ las clases de los conjuntos medible Lebesgue y los borelianos de $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Un resultado útil es el siguiente.

Proposición 6.1. *Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ clases de conjuntos en X, Y , repectivamente, a las que pertenecen X e Y ($X \in \mathcal{D}_1, Y \in \mathcal{D}_2$). Entonces:*

$$\mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1) \times \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_2) = \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2).$$

Demostración. Como

$$\mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1) \times \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_2) \supset \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1) \boxtimes \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_2) \supset \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2,$$

entonces:

$$\mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1) \times \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_2) \supset \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2).$$

Para el otro contenido hemos de probar que:

$$\mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1) \boxtimes \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_2) \subset \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2).$$

Se razona así. Para $D_2 \in \mathcal{D}_2$ fijo denotamos

$$\mathcal{S}_1 = \{E \subset X : E \times D_2 \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)\}.$$

Resulta que $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{D}_1$ es una σ -álgebra y por tanto $\mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1) \subset \mathcal{S}_1$, lo que significa que $E \times D_2 \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ para todo $E \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1)$. Para la comprobación de que $\mathcal{S}_1$ es σ -álgebra el paso clave es $E \in \mathcal{S}_1 \Rightarrow E^c \in \mathcal{S}_1$. A tal fin se observa que $G = (E \times D_2)^c \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ pero

$$G = E^c \times D_2 + X \times D_2^c = E^c \times D_2 + (X \times D_2)^c.$$

Como $(X \times D_2)^c \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$, resulta que $E^c \in \mathcal{S}_1$.

Ahora fijamos $E \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1)$ y ponemos:

$$\mathcal{S}_2 = \{F \subset Y : E \times F \in \mathcal{S}_a(\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)\}.$$

Resulta igualmente que $\mathcal{S}_2 \supset \mathcal{D}_2$, es una σ -álgebra, luego $\mathcal{S}_a(\mathcal{D}_2) \subset \mathcal{S}_2$ y hemos terminado. □

Proposición 6.2. *Si $\mathcal{B}(n)$ es la clase de los borelianos de $\mathbb{R}^n$ entonces:*

$$\mathcal{B}(m+n) = \mathcal{B}(m) \times \mathcal{B}(n).$$

Definición 6.3. *Dado $E \subset X \times Y$ y los elementos $x \in X$, $y \in Y$, se definen las secciones E_x, E^y de E como sigue:*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Proposición 6.4. *Sea $E \subset X \times Y$ un miembro de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Entonces, $E_x \in \mathcal{A}$, $E^y \in \mathcal{B}$ para elementos $x \in X$, $y \in Y$ cualesquiera.*

Proposición 6.5. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida, $E \subset X \times Y$ un conjunto arbitrario. Se define la clase*

$$\mathcal{F} = \{\cup_{i=1}^n E_i : E_i = A_i \times B_i \subset E, A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ para } i \neq j\},$$

es decir, la familia de las uniones finitas disjuntas de rectángulos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ contenidos en E (las figuras elementales de E). Entonces, $\mathcal{F}$ es un anillo.

Proposición 6.6. *Si las medidas μ y ν son σ -finitas entonces $X \times Y$, y por tanto cualquier subconjunto de $X \times Y$, puede recubrirse mediante una familia numerable de rectángulos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, que son disjuntos dos a dos y cuyos "lados" tienen medida finita.*

Definición 6.7. Una clase $\mathcal{M}$ de conjuntos de X se dice *monótona* si es cerrada mediante paso al límite sobre sucesiones monótonas. Es decir, si E_n es monótona en $\mathcal{M}$ entonces $\lim E_n \in \mathcal{M}$.

Observación 6.1. Se comprueba fácilmente que si un anillo $\mathcal{R}$ es clase monótona entonces es un σ -anillo.

Como la intersección arbitraria de familias monótonas de X es de nuevo una familia monótona entonces, dada una clase cualquiera $\mathcal{D}$ de conjuntos de X , siempre existe la clase monótona $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ generada por $\mathcal{D}$ que es aquella clase monótona $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ y cumple que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ para cualquier otra clase monótona $\mathcal{M}' \supset \mathcal{D}$.

Proposición 6.8. Si una clase monótona de X contiene a un anillo $\mathcal{R}$ entonces también contiene al σ -anillo $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ generado por $\mathcal{R}$.

Demostración. Sea $\mathcal{M} \supset \mathcal{R}$ la clase monótona y $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ la clase monótona generada por $\mathcal{R}$. Se demuestra que $\mathcal{M}_0$ es un anillo. Es decir, que si $E \in \mathcal{M}_0$ entonces para todo $F \in \mathcal{M}_0$, $E \setminus F$, $F \setminus E$ y $E \cup F$ están en $\mathcal{M}_0$.

Fijamos F y definimos $\mathcal{K}_F = \{E \subset X : F \setminus E, E \setminus F, E \cup F \in \mathcal{M}_0\}$. Se tienen entonces las observaciones siguientes:

- a) $\mathcal{K}_F$ es una clase monótona.
- b) $E \in \mathcal{K}_F \Leftrightarrow F \in \mathcal{K}_E$.

Ahora razonamos así. Si $F \in \mathcal{R}$ entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}_F$ luego $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{K}_F$. Así pues, para todo $E \in \mathcal{M}_0$ y $F \in \mathcal{R}$ resulta $F \in \mathcal{K}_E$. Luego $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}_E \Rightarrow \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{K}_E$.

Que para $E \in \mathcal{M}_0$ arbitrario se tenga que $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{K}_E$ quiere decir que $\mathcal{M}_0$ es un anillo. $\square$

Para uso inmediato fijamos la siguiente notación. Si $\mathcal{D}$ es una clase de conjuntos de X y $A \subset X$ es un subconjunto fijado, denotamos:

$$\mathcal{D} \cap A = \{E \cap A : E \in \mathcal{D}\}.$$

Es decir $\mathcal{D} \cap A$ es la clase de todas las intersecciones de elementos de $\mathcal{D}$ con A .

Lema 6.9. Sea $\mathcal{D}$ una clase de conjuntos de X y $A \subset X$ un subconjunto cualquiera. Entonces:

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) \cap A = \mathcal{S}(\mathcal{D} \cap A).$$

Observación 6.2. Si $\mathcal{D}$ es una clase de conjuntos en X a la que pertenece X entonces el σ -anillo y la σ -álgebra generados por $\mathcal{D}$ coinciden:

$$\mathcal{S}_a(\mathcal{D}) = \mathcal{S}(\mathcal{D}).$$

En efecto $\mathcal{S}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{S}_a(\mathcal{D})$ porque todo σ -anillo es una σ -álgebra. Sin embargo, el propio $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ es una σ -álgebra, por tanto se cumple el contenido complementario. Como aplicación del Lema, si $E = A \times B$ es un rectángulo entonces:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \cap E = \mathcal{S}_a(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}) \cap E = \mathcal{S}(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}) \cap E = \mathcal{S}(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \cap E).$$

Por otro lado $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \cap E \subset \mathcal{F}_E$ luego $\mathcal{S}(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \cap E) \subset \mathcal{S}(\mathcal{F}_E)$ mientras $\mathcal{F}_E \subset \mathcal{S}(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B} \cap E)$. Es decir:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \cap E = \mathcal{S}(\mathcal{F}_E).$$

Demostración del Lema. □

Ahora siguen los teoremas fundamentales del capítulo.

Teorema 6.10. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos y sea $E \subset X \times Y$ un elemento de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Para $x \in X$ se define

$$f(x) = \nu(E_x),$$

mientras que para $y \in Y$ se introduce

$$g(y) = \mu(E^y).$$

Entonces las funciones f y g son medibles en X e Y , respectivamente, y además

$$\int_X f \, d\mu = \int_Y g \, d\nu. \quad (6.1)$$

Observación 6.3. Se recuerda que toda función medible $f \geq 0$ posee una integral. Cuando f no es integrable en el sentido en que tal concepto fue introducido en el Capítulo II, se define, con razón,

$$\int_X f = \infty.$$

Véanse detalles en el Capítulo III. En la identidad 6.7 cabe también la posibilidad de que las integrales valgan ∞ .

Introducimos finalmente la medida producto.

Teorema 6.11. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos. Sobre la σ -álgebra producto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ se define la función de conjunto λ :

$$\lambda(E) = \int_X \nu(E_x) \, d\mu = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu. \quad (6.2)$$

Se tiene entonces que λ es una medida σ -finita sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Más aún, es la única medida $\bar{\lambda}$ sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que

$$\bar{\lambda}(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

sobre los rectángulos $A \times B$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Definición 6.12. Para $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos, la medida producto $\mu \times \nu$ sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ se define como

$$\mu \times \nu(E) = \lambda(E),$$

donde λ está definida por (6.2).

Observación 6.4. Algunas veces $\mu \times \nu$ se denota como $\mu \otimes \nu$.

Se demuestra en la Proposición 6.35 del Anexo que las restricciones λ_m , λ_n y λ_{m+n} de las medidas de Lebesgue a los borelianos $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_{m+n}$ cumplen

$$\lambda_{m+n}(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B), \quad A \in \mathcal{B}_m, B \in \mathcal{B}_n.$$

Por tanto,

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(E^y) dy, \quad (6.3)$$

siempre que $E \in \mathcal{B}_{m+n}$, donde dx , dy representan las medidas de Lebesgue en los espacios correspondientes.

6.2. El teorema de Fubini

Sea f una función definida en $E \subset X \times Y$. Se definen las secciones f_x y f^y de f como:

$$\begin{aligned} f_x(y) &= f(x, y) & y \in E_x, \\ f^y(x) &= f(x, y) & x \in E^y. \end{aligned}$$

Proposición 6.13. *Sea $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Entonces para todo $x \in X$ e $y \in Y$ las secciones $f_x : Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $f^y : X \rightarrow \mathbb{R}$ también son medibles.*

Sea h una función medible en $X \times Y$. Si h_x es integrable o no negativa para todo $x \in X$ escribimos

$$f(x) = \int_Y h_x d\nu. \quad (6.4)$$

Si f es integrable o medible y no negativa llamamos a $\int_X f d\mu$ una integral iterada de h y escribimos

$$\int_X f d\mu = \int_X \int_Y h d\nu d\mu = \int_X d\mu \int_Y h d\nu.$$

La otra integral iterada $\int_Y g d\nu$ se define bajo condiciones análogas como

$$\int_Y g d\nu = \int_Y \int_X h d\mu d\nu = \int_Y d\nu \int_X h d\mu,$$

donde

$$g(y) = \int_X h^y d\mu. \quad (6.5)$$

Siguen a continuación tres versiones de lo que se conoce como el teorema de Fubini.

Teorema 6.14 (Teorema de Fubini). *Sea h una función no negativa y medible en $X \times Y$. Entonces las funciones f y g definidas mediante (6.4) y (6.5) son medibles y se tiene que*

$$\int_{X \times Y} h \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y h \, d\nu d\mu = \int_Y \int_X h \, d\mu d\nu. \quad (6.6)$$

Otra versión del teorema de Fubini es la que sigue.

Teorema 6.15. *Supongamos que h es una función integrable sobre $X \times Y$. Entonces h_x (respectivamente h^y) es integrable para casi todo punto $x \in X$ (r. para casi todo punto $y \in Y$), la función f definida por (6.4) (r. la función g definida por (6.5)) es integrable en X (r. en Y) y se satisface la identidad (6.25).*

Finalmente, la variante más útil en las aplicaciones.

Teorema 6.16. *Sea h una función medible en $X \times Y$ y supongamos que o bien*

$$\int_X \int_Y |h| \, d\nu d\mu < \infty$$

o bien

$$\int_Y \int_X |h| \, d\mu d\nu < \infty.$$

Entonces h es integrable en $X \times Y$ y se satisface la identidad (6.25).

Corolario 6.17. *Un conjunto medible $E \subset X \times Y$ tiene medida cero si y sólo si E_x (respectivamente, E^y) es de medida cero para casi todo punto $x \in X$ (r. para casi todo punto $y \in Y$).*

6.3. El principio de Cavalieri

La razón de ser de la sección es el hecho siguiente: si $E \in \mathcal{L}(m+n)$, la σ -álgebra de los conjuntos de Lebesgue en $\mathbb{R}^{m+n}$, puede ocurrir que o bien E_x o bien E^y sean no medibles en $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{L}(m) \times \mathcal{L}(n) \subset \mathcal{L}(m+n)$ eso quiere decir que $\mathcal{L}(m+n)$ contiene estrictamente a $\mathcal{L}(m) \times \mathcal{L}(n)$ (se ve en el Anexo que la primera es la complección de la segunda). En consecuencia no podemos usar directamente los resultados de las secciones anteriores para calcular $\lambda_{m+n}(E)$ ($E \in \mathcal{L}(m+n)$) ni para integrar funciones sobre un conjunto medible E de $\mathbb{R}^{m+n}$. Por ejemplo, la existencia de las integrales

$$\int_X \nu(E_x) \, d\mu, \quad \int_Y \mu(E^y) \, d\nu,$$

que debería proporcionarnos el valor de $\lambda_{m+n}(E)$, queda en entredicho al no estar bien definidos los integrandos. Sin embargo, como explicamos a continuación, todavía puede darse sentido a tales integrales pues resulta que las funciones implicadas son casi medibles (véanse los Capítulos II y III).

Recordamos la definición. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, se dice $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es casi medible si $f|_{N^c} : N^c \rightarrow \mathbb{R}$ es medible para cierto conjunto nulo N . Si además $f|_{N^c} : N^c \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable se dice que f es integrable con integral:

$$\int f \, d\mu = \int_{N^c} f \, d\mu.$$

Se demuestra que la integral no depende del conjunto nulo N que aparece en la definición. Por la misma razón se cumple que si M es cualquier otro conjunto nulo tal que f está definida en M^c entonces

$$\int f \, d\mu = \int_{M^c} f \, d\mu.$$

Los resultados fundamentales de convergencia del Capítulo III son válidos para funciones integrables en este sentido. Por ejemplo, si $f : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una sucesión monótona de funciones casi medibles y no negativas:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad x \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_{n+1},$$

entonces

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

donde $f = \lim f_n$. En efecto, el límite existe y es medible en un conjunto de la forma M^c con M de medida nula.

Teorema 6.18. *Sea $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un conjunto medible Lebesgue. Entonces*

- i) $E_x \in \mathcal{L}(n)$ para casi todo punto $x \in X$.
- ii) La función $x \mapsto \lambda_n(E_x)$ es casi medible en $\mathbb{R}^m$.
- iii) $E^y \in \mathcal{L}(m)$ para casi todo punto $y \in Y$.
- iv) La apicación $y \mapsto \lambda_m(E^y)$ es casi medible en Y , por tanto integrable en Y (aunque su integral pueda valer ∞).
- vi) Se tiene la igualdad:

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) \, d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(E^y) \, d\lambda_n(y). \quad (6.7)$$

Observación 6.5. En el anexo a este Capítulo damos una prueba del Teorema 6.18 que es independiente de la construcción de la medida producto. Esto permite asimismo probar el Teorema de Fubini y resultados asociados en $\mathbb{R}^{m+n}$ –Sección 6.4– de manera independiente a la Sección 6.1.

Lema 6.19. *Si $N \in \mathcal{L}(m+n)$ es un conjunto nulo entonces N_x y N^y son conjuntos nulos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^m$ y para casi todo punto $y \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $x \mapsto \lambda_n(N_x)$ y $y \mapsto \lambda_m(N^y)$ son integrables con integral nula.*

Demostración. Se tiene $N \subset G$, G un boreliano de medida cero. Resultan $N_x \subset G_x$, $N^y \subset G^y$ para x, y cualesquiera. Sin embargo $\lambda_{m+n}(G) = 0$, mientras la fórmula (6.3) implica que G_x y G^y son nulos para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^m$ y $\forall$ c. t. $y \in \mathbb{R}^n$. Esto prueba el lema. $\square$

Demostración del Teorema 6.18. Si $E \in \mathcal{L}(m+n)$ entonces:

$$E = G + N,$$

donde G es un boreliano y N es un conjunto nulo.

Por tanto

$$E_x = G_x + N_x$$

y del lema se deduce que $E_x \in \mathcal{L}(n)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^m$ con lo que:

$$\lambda_n(E_x) = \lambda_n(G_x)$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^m$. Como

$$\lambda_m \otimes \lambda_n(G) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(G_x) d\lambda_m(x) = \lambda_{m+n}(G),$$

pues se demuestra (Anexo) que λ_{m+n} es una extensión de $\lambda_m \otimes \lambda_n$, entonces:

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m(x).$$

Las cuentas simétricas prueban que:

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(E^y) d\lambda_n(y).$$

$\square$

Siguen algunos corolarios.

Corolario 6.20. Si $E \in \mathcal{L}(m+n)$ tiene medida finita entonces $\forall$ c. t. $x \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $\lambda_n(E_x) < \infty$ junto con $\lambda_m(E^y) < \infty$ para casi todo punto $y \in \mathbb{R}^n$. Además:

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(E^y) d\lambda_n(y).$$

Corolario 6.21 (Principio de Cavalieri). Sean $E, F \in \mathcal{L}(m+n)$ tales que $\forall$ c. t. $x \in \mathbb{R}^m$ (respectivamente, $\forall$ c. t. $y \in \mathbb{R}^n$) se tiene $\lambda_n(E_x) = \lambda_n(F_x)$ ($\lambda_m(E^y) = \lambda_m(F^y)$). Entonces:

$$\lambda_{m+n}(E) = \lambda_{m+n}(F).$$

Ejemplo 6.6. Sea $B_1(0)$ la bola unidad Euclídea en $\mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\lambda_n(B_1(0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$ es la función Gamma.

En efecto usando el principio de Cavalieri:

$$\omega_n = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \omega_{n-1} = \prod_{i=1}^n B\left(\frac{1}{2}, \frac{i+1}{2}\right),$$

pues

$$\omega_1 = 2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Usando la relación:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

se deduce que

$$\omega_n = \pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}.$$

Por tanto:

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Observación 6.7. Ver también el Ejercicio 1.

Ejemplo 6.8. Interpretación geométrica de la integral. Sean $E \in \mathcal{L}(m)$, $f : E \rightarrow [0, \infty)$ medible y consideramos en $\mathbb{R}^{m+1}$ el conjunto:

$$G = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Entonces $G \in \mathcal{L}(m+1)$ y

$$\lambda_{m+1}(G) = \int_E f(x) dx,$$

donde dx representa λ_m .

Observación 6.9. Se prueba en el siguiente capítulo que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ –las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo– es invertible entonces $T(E) \in \mathcal{L}(n)$ si y sólo si $E \in \mathcal{L}(n)$ con

$$\lambda_n(T(E)) = |\det T| \lambda_n(E).$$

Observación 6.10. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es radial si $f(x) = g(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y cierta función $g : [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se puede probar que una tal función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si $t^{n-1}g(t) \in L^1(0, \infty)$ y entonces se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = n\omega_n \int_0^\infty t^{n-1}g(t) \, dt.$$

De hecho, se demuestra que $n\omega_n$ es el área de la esfera unidad $\partial B(0, 1)$.

Ejemplo 6.11. Sea $\varphi(x) = a + T(x)$ con $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertible, $E \in \mathcal{L}(n)$ y $f \in \mathcal{L}^1(\varphi(E))$, entonces $f \in \mathcal{L}^1(E)$ y:

$$\int_{\varphi(E)} f(y) \, dy = |\det T| \int_E f \circ \varphi(x) \, dx.$$

En efecto basta aplicar el ejemplo anterior a los conjuntos:

$$G = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f \circ \varphi(x)\}, \quad G' = \{(x', y') : x' \in \varphi(E), 0 \leq y' \leq f(x')\}$$

donde $G' = H(G)$ y $H(x, y) = (\varphi(x), y)$.

6.4. El teorema de Fubini en $\mathbb{R}^{m+n}$

Como se ha dicho $\mathcal{L}(m+n)$ no coincide con $\mathcal{L}(m) \times \mathcal{L}(n)$. No podemos en principio usar el Teorema de Fubini de la Sección 6.2 para reducir la integral de funciones de $L^1(G)$, donde $G \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es un abierto, a integrales iteradas. Sin embargo, una adaptación –en la línea de las ideas de la Sección 6.3 y el Anexo– puede desarrollarse para probar una versión del teorema en $\mathbb{R}^{m+n}$.

Teorema 6.22 (Tonelli). *Sea f una función medible y no negativa. Entonces,*

- a) $f(x, \cdot)$ es medible y no negativa en $\mathbb{R}^n$ p. c. t. $x \in \mathbb{R}^m$,
- b) la función $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy$ es casi medible en $\mathbb{R}^m$,
- c) se satisface la relación:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

Simétricamente:

- a') $f(\cdot, y)$ es medible y no negativa en $\mathbb{R}^m$ p. c. t. $y \in \mathbb{R}^n$,
- b') la función $\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx$ es casi medible en $\mathbb{R}^n$,
- c') se satisface la relación:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \right) \, dy.$$

Se da una demostración de este resultado en la sección siguiente.

Corolario 6.23. Si f es una función medible y no negativa y se consideran las integrales

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \right) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \right) dy,$$

entonces la finitud de una cualquiera de ellas implica la finitud de las otras dos y la coincidencia de los tres valores. Análogamente, la divergencia de una de las tres integrales implica la de las otras dos.

Corolario 6.24. Sea f una función medible en $\mathbb{R}^{m+n}$ tal que $f = 0$ en casi todo punto. Entonces:

- i) Existe un conjunto nulo M tal que $f(x, \cdot) = 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in M^c$.
- ii) Existe un conjunto nulo N tal que $f(\cdot, y) = 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^m$, para todo $y \in N^c$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Tonelli a la función $|f|$ y tener en cuenta que

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} |f| \, d(x, y) = 0.$$

□

Teorema 6.25 (Fubini). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$. Entonces,

- a) $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ p. c. t. $x \in \mathbb{R}^m$,
- b) la función $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy$ es casi medible e integrable en $\mathbb{R}^m$,
- c) se satisface la relación:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Simétricamente:

- a') $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ p. c. t. $y \in \mathbb{R}^n$,
- b') la función $\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx$ es casi medible e integrable en $\mathbb{R}^n$,
- c') se satisface la relación:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Demostración. Como las funciones $f^\pm$ son integrables y no negativas, aplicando el Teorema de Tonelli tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f^\pm \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(x, y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f^\pm(x, y) \, dx \right) dy.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} (f^+ - f^-) \, d(x, y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f^+(x, y) - f^-(x, y)) \, dy \right) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \right) \, dx. \end{aligned}$$

Con la otra integral iterada se procede igual. $\square$

Observación 6.12. Para abreviar escribimos:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Proposición 6.26. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ y $\sigma \in \Sigma_{m+n}$ una permutación. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, dx = \int \dots \int f \, dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(m+n)}.$$

Demostración. Para simplificar ponemos $p = m + n$ y observamos que en la integral iterada integramos por orden de “dentro hacia afuera”.

Para $\theta \in \Sigma_p$ definimos la transformación $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $L(y) = x$ donde $x = y_\theta$ con $x_i = y_{\theta(i)}$. Resulta fácil probar que:

$$\int f \, dx = \int f \circ L \, dy.$$

Llamando $\sigma = \theta^{-1}$, $y = x_\sigma$ por ello

$$\int_{\mathbb{R}^p} f \circ L \, dy = \int \dots \int f \circ L \, dy_1 \dots dy_p = \int \dots \int f \, dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(p)}.$$

$\square$

La versión útil del teorema de Fubini es la siguiente.

Teorema 6.27. Sea f una función medible en $\mathbb{R}^{m+n}$. Si una de las integrales

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} |f| \, d(x, y), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| \, dy \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| \, dx \, dy,$$

es finita, lo son las otras dos, coinciden y finalmente $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$. En particular,

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Corolario 6.28. Sea f medible en un abierto $G \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Si una de las integrales

$$\int_G |f| \, d(x, y), \quad \int_{G_1} \int_{G_x} |f(x, y)| \, dy \, dx, \quad \int_{G_2} \int_{G_y} |f(x, y)| \, dx \, dy,$$

es finita, donde G_1, G_2 son las proyecciones de G sobre $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, entonces lo son las otras dos, coinciden. En ese caso, $f \in L^1(G)$ y

$$\int_G f \, d(x, y) = \int_{G_1} \int_{G_x} f(x, y) \, dy dx = \int_{G_2} \int_{G_y} f(x, y) \, dx dy,$$

Demostración. Debe observarse que

$$\int_G f \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \tilde{f} \, d(x, y),$$

donde $\tilde{f}$ es la extensión por cero de f . Finalmente, $\tilde{f}(x, y) = \chi_{G_1}(x)\chi_{G_x}(y)\tilde{f}(x, y)$ y $\tilde{f}(x, y) = \chi_{G_2}(y)\chi_{G_y}(x)\tilde{f}(x, y)$. $\square$

6.4.1. Ejercicios

1. Hallar la medida $\lambda_n(\Delta_n)$ del símplice unidad:

$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}.$$

2. En $\mathbb{R}^n$ se considera el dominio Ω comprendido entre dos cilindros inscritos en el cubo $[-a, a]^n$. Usando la observación 6.10 calcúlese la medida de Ω particularizando su valor en el espacio ($n = 3$).

3. Probar que $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)}$ es integrable en $Q = (0, 1) \times (0, 1)$.

4. Estudiar la integrabilidad de $f(x, y) = y/\sqrt{x}$ en el cuadrado unidad $Q = (0, 1) \times (0, 1)$.

5. Demostrar que las dos integrales iteradas de la función $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ en el cubo $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ son distintas.

6. Probar que las dos integrales iteradas de la función $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, en $\mathbb{R}^2$ son iguales y aún así la función no es integrable en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, que existan las integrales iteradas de una función y que coincidan no implica su integrabilidad.

7. Estudiar la integrabilidad de $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ en el cuadrado unidad $Q = (0, 1) \times (0, 1)$.

8. Estudiar la integrabilidad de $f(x, y) = \frac{1}{(1 - xy)^\alpha}$, $\alpha > 0$, en el cuadrado unidad $Q = (0, 1) \times (0, 1)$.

6.5. El producto de convolución

El siguiente resultado permite definir con propiedad la operación

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \quad (6.8)$$

entre funciones integrables en $\mathbb{R}^n$.

Observación 6.13. En las aplicaciones el valor del producto de convolución en un punto x representa la “acción total” de un sistema sobre dicho punto. La integral expresa dicha acción como “suma” de las acciones individuales $f(x-y)g(y) dy$ que los puntos y ejercen sobre x .

En el caso del potencial Newtoniano en $\mathbb{R}^3$ las funciones son $f(x) = \frac{C}{|x|}$, $g(x) = \rho(x)$ donde ρ es una función integrable y no negativa con soporte en un abierto Ω . La convolución tiene en este caso la forma:

$$f * g(x) = C \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

Teorema 6.29. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

- i) La función $f * g$ en (6.8) está definida en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.
- ii) $f * g$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Más aún

$$f * g(x) = g * f(x)$$

p. c. t. $x \in \mathbb{R}^n$.

- iii) Se satisface la relación

$$|f * g|_1 \leq |f|_1 |g|_1.$$

Demostración. En primer lugar se tiene que $h(x, y) = f(x-y)g(y)$ es medible en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pues existe una sucesión de funciones continuas con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, f_n, g_n tales que $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ en casi todo punto. Afirmamos entonces que h es el límite en casi todo punto de una sucesión de funciones continuas, de donde h es medible. A tal efecto hay que probar que si $N \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo, entonces $\tilde{N} = \{(x, y) : x - y \in N\}$ es también un conjunto nulo. En efecto existe G_k una sucesión decreciente de abiertos $N \subset \lim G_k$ y $\lambda_n(G_k) \rightarrow 0$. Si para $A \subset \mathbb{R}^n$ cualquiera definimos $\tilde{A} = \{(x, y) : x - y \in A\}$ entonces

$$\tilde{N} \subset \lim \tilde{G}_k.$$

Si para $M > 0$ escribimos $D_M = \mathbb{R}^n \times \{|y| < M\}$, como

$$\tilde{N} \cap D_M \subset \lim \tilde{G}_k \cap D_M,$$

para todo M , basta con que demostremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{2n}(\tilde{G}_k \cap D_M) = 0.$$

Ahora, usando el teorema de Fubini se comprueba que:

$$\lambda_{2n}(\tilde{G}_k \cap D_M) = \lambda_n(G_k) \lambda_n(\{|y| < M\}).$$

Esto explica la validez del límite y, por tanto, que $\tilde{N}$ es un conjunto nulo.

En segundo lugar $h \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En efecto

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h| \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| \, dx dy = |f|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, dy = |f|_1 |g|_1.$$

Por el teorema de Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy \right) dx,$$

lo cual prueba que $f * g$ está definida en casi todo punto, es integrable y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h \, d(x, y).$$

Finalmente, como

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| \, dy,$$

entonces

$$|f * g|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h| \, d(x, y) = |f|_1 |g|_1.$$

La conmutatividad de la operación “ $*$ ” es inmediata. $\square$

Definición 6.30. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la función $f * g$ definida por (6.8) se llama el producto de convolución.

Observación 6.14. Una aplicación del producto de convolución es la observación de que $f * g$ es tan regular como g aunque f de hecho no lo sea. En efecto, si $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo,

$$\partial_{x_i}^\alpha f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_{x_i}^\alpha g(x-y) \, dy.$$

Esta idea se emplea para aproximar funciones de L^1 o L^p mediante funciones regulares cuando se g se reemplaza por una sucesión adecuada de funciones regulares g_ε (núcleos regularizantes).

Para establecer la propiedad anterior basta con que $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, es decir $f \in L_{loc}^1(K)$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. En efecto, para $|x - x_0| < \delta$:

$$f * g(x) = \int_K f(y) g(x-y) \, dy$$

donde $K = \{x : d(x) \leq \delta + d(x_0)\}$ donde $d(x) = \text{dist}(x, \text{sop } g)$. De ahí se deduce que

$$\partial_{x_i}^\alpha f * g(x) = \int_K f(y) \partial_{x_i}^\alpha g(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_{x_i}^\alpha g(x-y) \, dy,$$

para todo $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

Definición 6.31. Una familia de funciones no negativas $K_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, se dice una sucesión de núcleos aproximantes si

- i) $\int K_\varepsilon = 1$ para todo ε ,
- ii) Para todo $\eta > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x| > \eta\}} K_\varepsilon = 0$.

Ejemplo 6.15. Tomamos $K(x) = c \exp\{-\frac{1}{1-|x|^2}\}$ si $|x| < 1$, $K(x) = 0$ en $|x| \geq 1$, donde $c > 0$ se elige de forma que

$$\int K = 1.$$

Entonces, la familia $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(x/\varepsilon)$ conforma una sucesión de núcleos aproximantes. Obsérvese que las K_ε son C^∞ en $\mathbb{R}^n$.

Se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 6.32. Sea K_ε una sucesión arbitraria de núcleos aproximantes y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f_\varepsilon = K_\varepsilon * f \rightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si en particular, la sucesión K_ε es la del Ejemplo 6.15 entonces $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esto significa que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x)) K_\varepsilon(x - y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - y) - f(x)) K_\varepsilon(y) dy, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)| dx dy = \\ &= \left\{ \int_{|y| \leq \eta} + \int_{|y| \geq \eta} \right\} K_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)| dx dy \leq \\ &= \sup_{|y| \leq \eta} \|f_y - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{|y| \geq \eta} K_\varepsilon(y) dy, \end{aligned}$$

en donde $f_y(x) = f(x - y)$. El primer término es pequeño si η es pequeño y el segundo tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$. $\square$

Fijamos ahora K_ε como en el Ejemplo 6.15.

Teorema 6.33. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $f_\varepsilon \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Más generalmente, si G es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$

$$f_\varepsilon(x) = \int_G f(y) K_\varepsilon(x - y) dy$$

entonces $f_\varepsilon \rightarrow f$ en $L^p(G)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Análogamente, si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente $C(G)$) entonces $f_\varepsilon \rightarrow f$ en $C(\mathbb{R}^n)$ ($C(G)$) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, donde convergencia en $C(G)$ significa convergencia uniforme en cada subconjunto compacto $K \subset G$.

Demostración. La segunda afirmación es consecuencia de la primera porque si $\tilde{f}$ es la extensión por cero fuera de G entonces la última integral no es sino la expresión de $\tilde{f} * K_\varepsilon$.

Para probar la primera escribimos:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)|^p \leq \|K_\varepsilon\|_{L^q(B(0,\varepsilon))}^p \int_{|y| \leq \varepsilon} |f(x-y) - f(x)|^p dy.$$

Ahora:

$$\|K_\varepsilon\|_{L^q(B(0,\varepsilon))}^p \leq \frac{A}{\varepsilon^{n(q-1)\frac{p}{q}}} = \frac{A}{\varepsilon^n},$$

donde $A = \|K\|_{L^q(B(0,1))}^p$. Por tanto:

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq A\omega_n \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|f_y - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,$$

donde $\omega_n = \lambda_n(B(0,1))$. Se sabe que el último término tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$. $\square$

6.6. Teorema de Cauchy-Peano, 2ª nota

Consideramos una función continua $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface:

$$|f(t, y)| \leq M \quad \forall (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n, \quad (6.9)$$

para cierta constante positiva M .

Teorema 6.34. Para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ el problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

posee al menos una solución $y(t)$ definida en $[a, b]$.

Demostración. Introducimos la regularización en y de la función f :

$$f_\varepsilon(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y - z) f(t, z) dz,$$

donde los K_ε son los núcleos regulares del Ejemplo 6.15. Entonces la función f_ε es C^∞ con respecto a la variable y y, como f , está acotada en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ por M . Por otro lado, al ser

$$\partial_{y_i} f_\varepsilon(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{y_i} K_\varepsilon(y - z) f(t, z) dz, \quad 1 \leq i \leq n,$$

funciones acotadas en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, en virtud del teorema de Picard–Lindelöf ([7]), el problema aproximado:

$$\begin{cases} y' = f_\varepsilon(t, y) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

admite una única solución $y_\varepsilon(t)$ definida en $[a, b]$. Tal solución cumple:

$$y_\varepsilon(t) = y_0 + \int_a^t f_\varepsilon(s, y_\varepsilon(s)) \, ds.$$

De aquí se deduce que la familia $\{y_\varepsilon(t)\}$ está uniformemente acotada en $[a, b]$. Además, las gráficas de $y_\varepsilon(t)$ yacen en el compacto $K = [a, b] \times \{y : |y - y_0| \leq M\}$. Asimismo, las derivadas $y'_\varepsilon(t)$ están uniformemente acotadas en $[a, b]$ por M , luego la familia $\{y_\varepsilon(t)\}$ es equicontinua en $[a, b]$. Existe por tanto una subsucesión $y_{\varepsilon_n}(t)$ de $y_\varepsilon(t)$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, que converge uniformemente a una cierta $y(t)$ continua en $[a, b]$. Como $f_{\varepsilon_n} \rightarrow f$ uniformemente en K entonces:

$$f_{\varepsilon_n}(t, y_{\varepsilon_n}(t)) \rightarrow f(t, y(t))$$

uniformemente en $[a, b]$. Pasando al límite en:

$$y_{\varepsilon_n}(t) = y_0 + \int_a^t f_{\varepsilon_n}(s, y_{\varepsilon_n}(s)) \, ds$$

obtenemos:

$$y(t) = y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) \, ds,$$

para $t \in [a, b]$ que prueba que $y(t)$ resuelve el problema:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en $[a, b]$. □

6.7. Anexo

Desarrollamos una prueba independiente del Teorema 6.18.

El primer paso es la siguiente propiedad.

Proposición 6.35. Sean $E \in \mathcal{L}(m)$, $F \in \mathcal{L}(n)$. Entoces $E \times F \in \mathcal{L}(m+n)$ y

$$\lambda_{m+n}(E \times F) = \lambda_m(E)\lambda_n(F).$$

Demostración. Sabemos que $E = B \setminus M$, $F = B' \setminus N$ donde B, B' son borelianos y M, N son nulos.

Por tanto:

$$E \times F = (B \times B') \cap (M^c \times N^c) = (B \times B') \setminus O,$$

donde

$$O = (M^c \times N^c)^c = M \times \mathbb{R}^n + M^c \times N$$

es un conjunto nulo de $\mathbb{R}^{m+n}$, por tanto de $\mathcal{L}(m+n)$ (Lema 6.37).

Por otro lado sabemos que $B \times B'$ es un boreliano de $\mathbb{R}^{m+n}$ (Proposición 6.2), con lo que $E \times F \in \mathcal{L}(m+n)$.

Nos concentramos ahora en demostrar que

$$\lambda_{m+n}(E \times F) = \lambda_m(E)\lambda_n(F).$$

Primeramente, en el caso de abiertos G, G', G y G' se escriben como unión disjunta de intervalos diádicos I_r y J_s respectivamente con lo que

$$\begin{aligned} \lambda_{m+n}(G \times G') &= \lambda_{m+n}(\cup_{r,s} I_r \times J_s) = \sum_{r,s} \lambda_{m+n}(I_r \times J_s) = \\ &= \sum_{r,s} \lambda_m(I_r) \lambda_n(J_s) = \left(\sum_r \lambda_m(I_r) \right) \left(\sum_s \lambda_n(J_s) \right). \end{aligned}$$

La identidad es válida independientemente de si los abiertos tienen medida finita o no.

Suponemos ahora $E \times F$ acotados. Entonces

$$E \times F = B \times B' \setminus O$$

donde

$$E = (\lim G_r) \setminus M := B \setminus M, \quad F = (\lim G'_s) \setminus N := B' \setminus N,$$

las sucesiones G_r, G'_s son decrecientes, los G_r, G'_s son abiertos y los conjuntos M, N son nulos; siendo finalmente

$$\lambda_m(E) = \lim \lambda_m(G_r) \quad \lambda_n(F) = \lim \lambda_n(G'_s).$$

Como O es nulo:

$$\lambda_{m+n}(E \times F) = \lambda_{m+n}(B \times B') = \lim \lambda_{m+n}(G_r \times G'_s) = \lim \lambda_m(G_r) \lambda_n(G'_s).$$

Luego

$$\lambda_{m+n}(E \times F) = \lambda_m(E) \lambda_n(F).$$

En el caso general $E = \lim E_k, F = \lim F_k$ donde las sucesiones son crecientes y sus miembros acotados, luego

$$\lambda_{m+n}(E \times F) = \lim \lambda_{m+n}(E_k \times F_k) = \lim \lambda_m(E_k) \lambda_n(F_k) = \lambda_m(E) \lambda_n(F).$$

□

De la caracterización de la medida producto $\mu \otimes \nu$ se sigue que:

Proposición 6.36. Si λ_{m+n} es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{m+n}$ entonces la restricción de λ_{m+n} a $\mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n$ es $\lambda_m \otimes \lambda_n$:

$$\lambda_{m+n}|_{\mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n} = \lambda_m \otimes \lambda_n.$$

Lema 6.37. Sea $M \in \mathcal{L}(m)$ un conjunto nulo y $H \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera. Entonces $M \times H$ es un conjunto nulo y en particular

$$M \times H \in \mathcal{L}(m+n).$$

Demostración. Se puede escribir

$$M \times H = \cup_n M \times H_n$$

donde H_n es acotado para cada n y es inmediato ver que $M \times H_n$ es un conjunto nulo. $\square$

Proposición 6.38. $\lambda_m \otimes \lambda_n$ no es completa.

Demostración. Si el conjunto H del lema cumple ahora que $H \notin \mathcal{L}_n$ entonces $M \times H \notin \mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n$. Sin embargo existe $B \supset M \times H$, boreliano, con medida cero. Como $B \in \mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n$ es λ_{m+n} nulo, luego $\lambda_m \otimes \lambda_n$ nulo, entonces $\lambda_m \otimes \lambda_n$ no es completa. $\square$

Proposición 6.39. $\mathcal{L}_{m+n}$ es la complección de $\mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n$.

Demostración. Sabemos que todo rectángulo $E \in \lambda_m \boxtimes \lambda_n$ de medida finita (por tanto, todo rectángulo), está en $\overline{\mathcal{B}_{m+n}}$. En efecto $E = B \setminus N$ donde B es un G_δ y N es un conjunto nulo de $\mathbb{R}^{m+n}$.

La afirmación se sigue entonces de:

$$\mathcal{B}_{m+n} \subset \lambda_m \times \lambda_n = \mathcal{S}_a(\lambda_m \boxtimes \lambda_n) \subset \overline{\mathcal{B}_{m+n}},$$

tomando complecciones y observando que $\overline{\mathcal{B}_{m+n}} = \mathcal{L}_{m+n}$.

Por otro lado, si $E \in \mathcal{L}_{m+n}$ entonces $E = F + H$ donde $F \in \mathcal{L}_m \times \mathcal{L}_n$ y H es un conjunto nulo de Lebesgue en $\mathbb{R}^{m+n}$. De ahí:

$$\lambda_{m+n}(E) = \lambda_{m+n}(F) = \lambda_m \otimes \lambda_n(F).$$

De ahí λ_{m+n} es ciertamente la mínima extensión completa de $\lambda_m \otimes \lambda_n$. $\square$

Demostración del Teorema 6.18. Denominamos $\mathcal{C}(m, n)$ el conjunto

$$\mathcal{C}(m, n) = \{A \in \mathcal{L}(m+n) : A \text{ cumple a), b) y c)}\}$$

con:

- a) $A_x \in \mathcal{L}(n)$ para c. t. $x \in \mathbb{R}^m$,
- b) la función $x \mapsto \lambda_n(A_x)$ es casi medible,

c) se satisface que

$$\lambda_{m+n}(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(A_x) dx. \quad (6.10)$$

Se trata de probar $\mathcal{C}(m, n) = \mathcal{L}(m+n)$ y a tal efecto se procede por etapas ([1]).

i) Según hemos visto

$$\mathcal{L}(m) \boxtimes \mathcal{L}(n) = \{E \times F : E \in \mathcal{L}(m), F \in \mathcal{L}(n)\} \subset \mathcal{C}(m, n).$$

En efecto $\lambda_n(A_x) = \lambda_n(F)\chi_E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

ii) Si A_k es una sucesión creciente en $\mathcal{C}(m, n)$ entonces

$$A = \lim A_k \in \mathcal{C}(m, n).$$

Para probarlo se tiene que

$$A_x = \cup_k A_{k,x} = \lim A_{k,x} \in \mathcal{L}(n)$$

p. c. t. $x \in \mathbb{R}^m$.

La función $f(x) := \lambda_n(A_x) = \lim f_k(x)$ con $f_k(x) = \lambda_n(A_{k,x})$, es casi medible por serlo las f_k . Del teorema de la convergencia monótona

$$\int f(x) dx = \lim \int f_k(x) = \lim \lambda_{m+n}(A_k) = \lambda_{m+n}(A),$$

que es lo que queríamos demostrar.

iii) Si A_k es una sucesión decreciente en $\mathcal{C}(m, n)$ tal que existe j_0 con $\lambda_{m+n}(A_{j_0}) < \infty$ entonces

$$A = \lim A_k \in \mathcal{C}(m, n).$$

Usando la notación de iii) notamos ahora que $f_k \leq f_{k_0} \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Por eso

$$\int f(x) dx = \lim \int f_k(x) = \lim \lambda_{m+n}(A_k) = \lambda_{m+n}(A),$$

con lo que

$$\int f(x) dx = \lambda_{m+n}(A).$$

iv) Si A_k es una familia en $\mathcal{C}(m, n)$ de elementos disjuntos dos a dos entonces

$$A = \cup_k A_k \in \mathcal{C}(m, n).$$

En efecto $A = \lim B_l$ donde $B_l = A_1 + \dots + A_l \in \mathcal{C}(m, n)$ como es fácil comprobar. Luego $A \in \mathcal{C}(m, n)$.

v) Todo abierto $G \subset \mathbb{R}^{m+n}$ está en $\mathcal{C}(m, n)$. Esto se sigue de que G es la unión disjunta de una familia de intervalos diádicos los cuales pertenecen todos a $\mathcal{C}(m, n)$.

vi) Todo $\mathcal{G}_\delta$ acotado $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – A es un $\mathcal{G}_\delta$ si es la intersección de una familia numerable de abiertos– pertenece a $\mathcal{C}(m, n)$.

En efecto, si A es un $\mathcal{G}_\delta$ acotado entonces $A = \lim G_k$ donde G_k es una sucesión decreciente de abiertos acotados. Luego $A \in \mathcal{C}(m, n)$.

vii) Todo conjunto nulo A de $\mathbb{R}^{m+n}$ pertenece a $\mathcal{C}(m, n)$. Como además se tiene

$$\int \lambda_n(A_x) dx = 0$$

se puede asegurar la existencia de un conjunto nulo $M \subset \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lambda_n(A_x) = 0 \quad x \in M^c.$$

En otras palabras, casi todas las secciones de un conjunto nulo tienen asimismo medida n -dimensional cero.

Para probar la afirmación de nulidad escribimos

$$A = \cup A_j \quad A_j = A \cap B(0, j).$$

Como A_j es un conjunto nulo acotado, existe un $\mathcal{G}_\delta$, nulo y acotado B_j tal que $A_j \subset B_j$. Asimismo, $B_j \in \mathcal{C}(m, n)$ luego

$$0 = \int \lambda_n(B_{j,x}) dx \Rightarrow \lambda_n(B_{j,x}) = 0 \quad x \in M_j^c.$$

Así

$$0 = \lambda_n(\cup B_{j,x}) \supset \lambda_n(\cup A_{j,x}) = \lambda_n(A_x) \quad x \in M^c = (\cup M_j)^c.$$

Esto significa que A_x es un conjunto nulo p. c. t. $x \in \mathbb{R}^m$ lo cual prueba la afirmación inicial.

viii) Probamos finalmente el Teorema 6.18. Cualquier $E \in \mathcal{L}(m+n)$ es la unión disjunta de una sucesión $E_k \in \mathcal{L}(m+n)$ de elementos disjuntos y acotados.

Cada E_k satisface la relación:

$$B_k = E_k + N_k$$

donde B_k es un $\mathcal{G}_\delta$ y N_k es un nulo (todos en $\mathbb{R}^{m+n}$).

De la identidad

$$B_{k,x} = E_{k,x} + N_{k,x}$$

se deduce $E_{k,x} \in \mathcal{L}(n)$ p. c. t. x . Además

$$\lambda_n(B_{k,x}) = \lambda_n(E_{k,x})$$

p. c. t. x . Finalmente, $\lambda_n(E_{k,x})$ es integrable con

$$\lambda_{m+n}(B_k) = \int \lambda_n(B_{k,x}) dx = \int \lambda_n(E_{k,x}) dx = \lambda_{m+n}(E_k),$$

puesto que desde un principio $\lambda_{m+n}(B_k) = \lambda_{m+n}(E_k)$.

Como hemos probado que $E_k \in \mathcal{C}(m, n)$ entonces $B_k \in \mathcal{C}(m, n)$. □

Observaciones 6.16.

- a) Las afirmaciones del Teorema 6.18 referentes a las secciones “ y ” se demuestran de manera simétrica.
- b) Nótese que el Corolario 6.20 es consecuencia directa del Teorema 6.18.

Ahora sigue un resultado técnico que se emplea para la prueba del Teorema de Fubini de la Sección 6.4.

Lema 6.40. *Sea $f \in L(\mathbb{R}^{m+n})$ una función integrable y simple. Entonces:*

- a) $f(x, \cdot)$ es integrable y simple en $\mathbb{R}^n$ p. c. t. $x \in \mathbb{R}^m$,
- b) la función $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ es integrable en $\mathbb{R}^m$,
- c) se satisface la relación:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx.$$

Simétricamente:

- a') $f(\cdot, y)$ es integrable y simple en $\mathbb{R}^m$ p. c. t. $y \in \mathbb{R}^n$,
- b') la función $\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx$ es integrable en $\mathbb{R}^n$,
- c') se satisface la relación:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy.$$

Demostración. Escribimos la función

$$f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{E_k}$$

y observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_{m+n}(E_k) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_n(E_{k,x}) \right) dx$$

pues el integrando es una combinación lineal de funciones casi medibles que son integrables.

Por otro lado:

$$f(x, \cdot) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{E_{k,x}}$$

de donde $f(x, \cdot)$ es simple e integrable en $\mathbb{R}^n$ p. c. t. x y:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy = \sum_{k=1}^N \alpha_k \lambda_n(E_{k,x}).$$

Esto prueba que la integral del primer miembro es una función casi medible cuya integral

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y),$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Demostración del Teorema 6.22. Si f es medible no negativa entonces

$$f = \lim f_j$$

donde el límite es puntual y f_j es una sucesión de funciones simples e integrables en $\mathbb{R}^{m+n}$. La integrabilidad es consecuencia del carácter σ -finito de $\mathbb{R}^{m+n}$. Por consiguiente,

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d(x, y) = \lim \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_j d(x, y).$$

Nótese que en tal identidad la integral de f puede ser finita o infinita.

Asimismo, las funciones $f_j(x, \cdot)$ son medibles en $\mathbb{R}^n$ (Lema 6.40) y forman una sucesión creciente para $x \in M^c$, donde M es un conjunto nulo. Además

$$\lim f_j(x, \cdot) = f(x, \cdot).$$

Por tanto $f(x, \cdot)$ es medible en $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in M^c$.

El Lema 6.40 dice además que

$$F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x, y) dy$$

es medible en M^c . Por lo tanto también

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

es medible en M^c (F es casi medible en $\mathbb{R}^m$) con integral (Teorema de la Convergencia Monótona):

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(x) dx = \int_{M^c} F(x) dx = \lim \int_{\mathbb{R}^m} F_j(x) dx.$$

Nótese que

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx.$$

Por otro lado

$$\lim \int_{\mathbb{R}^m} F_j(x) dx = \lim \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_j d(x, y),$$

en virtud del Lema 6.40. Esto prueba la identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx.$$

Con la otra integral iterada se procede igual. $\square$

Capítulo 7

Integral de Lebesgue y diferenciación

7.1. Teorema de diferenciación de Lebesgue

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ es conocido que:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

define una función C^1 en $[a, b]$ y que su derivada vale:

$$F'(x) = f(x) \quad x \in [a, b].$$

De hecho esta es una de las versiones del teorema fundamental del cálculo.

Uno de los objetivos del capítulo consiste en explorar la extensión de este enunciado a integrandos más generales. En particular, cuando f es integrable Lebesgue. Se tiene de hecho el siguiente resultado.

Teorema 7.1. *Sea $f \in L^1(a, b)$. Entonces su primitiva:*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

es derivable en casi todo punto $x \in (a, b)$ y de hecho:

$$F'(x) = f(x)$$

para casi todo $x \in (a, b)$.

Observación 7.1. Estudiamos en el Capítulo III la continuidad absoluta de la función $F(x)$.

El Teorema 7.1, de gran interés entre otras áreas en el Cálculo de Variaciones, es consecuencia de una serie de resultados que establecemos a continuación. A modo de presentación de éstos realizamos la siguiente observación.

Al escribir el cociente incremental de F hallamos fácilmente que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{\lambda_1(I)} \int_I f,$$

donde $I = (x, x+h)$ o $I = (x+h, x)$ dependiendo de si h es positivo o negativo y donde recordamos que $F(x) = \int_{(a,x)} f$.

Esta reflexión invita a considerar, para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, los promedios:

$$\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) \, dy,$$

y estudiar su límite cuando las bolas abiertas B pasan por un punto fijado $x \in \mathbb{R}^N$ y su volumen (es decir su radio) tiende a cero.

Por el momento tendremos en mente que tratamos con bolas euclídeas aunque más tarde consideramos conjuntos medibles ligeramente más generales.

Podemos enunciar una especie de extensión general del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 7.2 (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ entonces*

$$\lim_{\substack{\lambda_n(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) \, dy = f(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Una primera observación elemental es la siguiente.

Proposición 7.3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es continua en x entonces*

$$\lim_{\substack{\lambda_n(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) \, dy = f(x)$$

Demostración. Se tiene que

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

si $|x - y| < \delta$. Si B es cualquier bola (abierta) con radio $r_B \leq \frac{\delta}{2}$ que pasa por x entonces $B \subset B(x, \delta)$, por eso:

$$\left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) \, dy - f(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy < \varepsilon.$$

□

Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define la función maximal de Hardy-Littlewood f^* asociada a f como

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y)| dy,$$

donde el supremo se extiende a todas las bolas abiertas B que pasan por el punto x .

Teorema 7.4. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

- i) f^* es medible.
- ii) $f^*(x) < \infty$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.
- iii) Se cumple la estimación

$$\lambda_n(\{f^* \geq \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_1, \quad (7.1)$$

donde $A = 3^n$.

Observación 7.2. La estimación 7.1 se llama una desigualdad débil. De hecho, es una especie de sustituto de la desigualdad de Tchebychev la cual sería válida si f^* fuese integrable, hecho éste que no es cierto en general (Observación 7.4). Nótese por otro lado que, del Teorema 7.2 se sigue que $|f| \leq f^*$ en casi todo punto.

Finalmente, ii) es consecuencia directa de iii).

La prueba de iii) requiere un resultado de recubrimiento.

Lema 7.5 ([17]). *Sea $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_N\}$ una colección de bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\mathcal{B}$ admite una subfamilia disjunta $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_k}\}$ de forma que:*

$$\lambda_n(\cup_i B_i) \leq 3^n \lambda_n(\cup_k B_{i_k}).$$

Observación 7.3. El lema afirma que la fracción de masa recubierta por la subfamilia disjunta está acotada inferiormente por una constante (3^{-n}) que no depende del número ni del tamaño de las bolas de $\mathcal{B}$.

Demostración. La base del argumento es la siguiente afirmación: si $B = B(x, R)$, $B' = B(x', R')$ son dos bolas con $B \cap B' \neq \emptyset$ y $R \geq R'$ entonces

$$B' \subset 3B := B(x, 3R).$$

En efecto si $y \in B'$:

$$d(y, x) \leq d(y, x') + d(x', x) < R + d(x', z) + d(z, x) < 3R,$$

donde z es un punto de la intersección.

Ahora procedemos como sigue. En $\mathcal{B}$ tomamos B_{i_1} una bola de radio máximo y suprimimos de $\mathcal{B}$ dicha bola junto con todas aquellas a las que corta. El resultado es una familia $\mathcal{B}'$ de bolas con a lo sumo $N - 1$ elementos. Si es que en

$\mathcal{B}'$ quedan bolas, considero la de radio máximo B_{i_2} y la quito de $\mathcal{B}'$ junto con todas las bolas de $\mathcal{B}'$ a las que corta. Obtengo así una nueva familia de bolas $\mathcal{B}''$ con a lo sumo $N - 2$ elementos. Tras como mucho N pasos se sacan todas las bolas de $\mathcal{B}$ para formar una subfamilia $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\}$ de bolas disjuntas. Además, toda bola B_k de $\mathcal{B}$ o bien es una B_{i_j} o bien corta a una B_{i_j} . En los dos casos:

$$B_k \subset 3B_{i_j}.$$

Por consiguiente

$$\cup_k B_k \subset \cup_j 3B_{i_j}.$$

De aquí:

$$\lambda_n(\cup_k B_k) \leq \sum_j \lambda_n(3B_{i_j}) = 3^n \sum_j \lambda_n(B_{i_j}) = 3^n \lambda_n(\cup_j B_{i_j}).$$

□

La siguiente afirmación se propuso en su momento como ejercicio (Capítulo I, Ejercicio 13)

Lema 7.6. Sea $E \in \mathcal{L}(n)$. Entonces

$$\lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Demostración. Supongamos que E es un conjunto acotado. Entonces $E \subset I$, I un intervalo compacto. Además, existe G_k , una sucesión decreciente de abiertos tales que

$$I - E \subset \lim G_k \cap I \quad \lambda_n(I - E) = \lim \lambda_n(G_k \cap I).$$

Por tanto

$$E \supset \lim I - (G_k \cap I) \quad \lim \lambda_n(I - (G_k \cap I)) = \lambda_n(I) - \lim \lambda_n(G_k \cap I) = \lambda_n(E).$$

Como $I - (G_k \cap I) = I - G_k$ es un compacto de E podemos concluir que

$$\lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Si E es un medible general, E es la unión creciente de una sucesión de acotados E_j . Dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_j \subset E_j$ tal que

$$\lambda_n(E_j) - \varepsilon < \lambda_n(K_j) \leq \sup\{\lambda_n(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Tomando límites en j

$$\lambda_n(E) - \varepsilon \leq \sup\{\lambda_n(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}.$$

Esto prueba la afirmación. □

Hemos probado la siguiente propiedad.

Propiedad 7.7. *Todo conjunto E de $\mathcal{L}(n)$ se puede representar en la forma:*

$$E = K + N$$

donde N es un conjunto nulo y K es un σ -compacto, es decir una unión numerable de compactos.

Demostración. El conjunto $E = \cup E_j$ donde los E_j son acotados. Basta pues, demostrar la afirmación para conjuntos acotados $E \in \mathcal{L}(n)$. Si $K_s \subset E$ es un compacto tal que

$$\lambda_n(E) - \frac{1}{s} < \lambda_n(K_s),$$

entonces $K = \cup_s K_s$ es un σ -compacto que cumple $\lambda_n(K) = \lambda_n(E)$. Esto prueba la propiedad. $\square$

Demostración del Teorema 7.4. Para probar i) notamos que si $x \in \{f^* > \alpha\}$,

$$\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f| > \alpha,$$

para alguna bola abierta B con $x \in B$. Esto significa que $f^*(x') > \alpha$ para todo $x' \in B$, luego $\{f^* > \alpha\}$ no sólo es medible sino que es abierto. Hemos probado de hecho que f^* es semicontinua inferiormente.

Asimismo, para cada $x \in \{f^* > \alpha\}$ existe una bola abierta B_x que cumple:

$$\alpha \lambda_n(B_x) \leq \int_{B_x} |f|.$$

Entonces, todo compacto $K \subset \{f^* > \alpha\}$ está recubierto por un número finito de tales bolas $\{B_1, \dots, B_N\}$ a las que aplicando el lema de recubrimiento permiten encontrar la subfamilia disjunta $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\}$. Así:

$$K \subset \cup_s 3B_{i_s}.$$

Luego:

$$\lambda_n(K) \leq 3^n \sum_s \lambda_n(B_{i_s}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_s \int_{B_{i_s}} |f|.$$

Usando el carácter disjunto de las bolas resulta

$$\lambda_n(K) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_s \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Esto prueba iii). $\square$

Observación 7.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ no es idénticamente nula, la función f^* no es integrable.

En efecto $\int_{B_{r_0}} |f| > 0$ para algún $r_0 > 0$ ($B_r = B(0, r)$). Para $|x| \geq r_0$ resulta que

$$f^*(x) \geq \frac{1}{\omega_n 2^n |x|^n} \int_{B_{2|x|}} |f| \geq \left(\frac{1}{2^n \omega_n} \int_{B_{r_0}} |f| \right) \frac{1}{|x|^n}.$$

Esto prueba la no integrabilidad de f^* .

Observación 7.5. La estimación en iii) del Teorema 7.4 es óptima. Tomemos f con soporte en B_1 e integral:

$$\int_{B_1} |f| = 1.$$

Entonces, para $|x| > 1$:

$$f^*(x) \geq \frac{1}{\lambda_n(B(0, |x|))}.$$

Para obtener la desigualdad tomamos $B(0, |x| + \varepsilon)$ y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Por tanto:

$$f^*(x) \geq \frac{1}{\omega_n |x|^n}$$

para $|x| > 1$. Esto dice que:

$$\{x : 1 < |x| < \frac{1}{(\omega\alpha)^{1/n}}\} \subset \{f^*(x) > \alpha\}$$

Observamos ahora que la medida λ_n del conjunto de la izquierda es equivalente a $1/\alpha$ cuando $\alpha \rightarrow 0+$. Por tanto:

$$\lambda_n\{f^*(x) > \alpha\} \geq \frac{c}{\alpha},$$

para $\alpha \rightarrow 0+$ con c tan próximo a 1 como se desee (con tal de que se tome α pequeño). Por otra parte, nótese que iii) implica:

$$\lambda_n\{f^*(x) > \alpha\} \leq \frac{3^n}{\alpha},$$

para todo α .

Demostración del Teorema 7.2, [17]. Basta con demostrar que para $\alpha > 0$ cualquiera el conjunto:

$$E_\alpha := \{x : \overline{\lim}_{\substack{\lambda_n(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| > \alpha\}$$

tiene medida cero.

A tal efecto tomamos $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y observamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) \, dy - f(x) &= \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B (f(y) - g(y)) \, dy + \\ &\quad \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B (g(y) - g(x)) + |g(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{\substack{\lambda_n(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y) \, dy - f(x) \right| \leq (f - g)^*(x) + |f(x) - g(x)|.$$

Denotando

$$F_\alpha = \{(f - g)^*(x) > \frac{\alpha}{2}\} \quad G_\alpha = \{|f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

resulta que $E_\alpha \subset F_\alpha \cup G_\alpha$ ($F_\alpha^c \cap G_\alpha^c \subset E_\alpha^c$). Usando la desigualdad de Tchebychev y el Teorema 7.4 tenemos que:

$$\lambda_n(F_\alpha) + \lambda_n(G_\alpha) \leq 2 \frac{3^n + 1}{\alpha} \|f - g\|_1.$$

Sin embargo, en virtud de los resultados del Capítulo V, g puede escogerse de forma que $\|f - g\|_1$ sea tan pequeña como se quiera. De ahí, $\lambda_n(E_\alpha) = 0$ $\square$

Definición 7.8. Sea f una función medible en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si $f \in L^1(K)$ para todo compacto K de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 7.9. La conclusión del Teorema 7.2 es cierta si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Tomamos $B_{2N} = B(0, 2N)$. Para todo $x \in B_N = B(0, N)$ y toda bola B con $x \in B_N$ y radio $r_B < \frac{N}{2}$ se tiene

$$B \subset B_{2N}.$$

Si $\tilde{f} = \chi_{B_{2N}} f$ entonces

$$\lim_{\lambda_n(B) \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B \tilde{f} = \tilde{f}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$, $\lambda_n(M) = 0$. Fijado entonces $x \in B_N \setminus M$ y dado $\varepsilon > 0$ se tiene entonces que

$$\left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B \tilde{f} - \tilde{f}(x) \right| < \varepsilon$$

para toda B con $x \in B$ y $r_B < \delta$. En particular, para toda bola B con $x \in B$ y $r_B < \min\{\delta, \frac{N}{2}\}$. Sin embargo, esto significa que $B \subset B_{2N}$ luego

$$\left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f - f(x) \right| < \varepsilon,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de Lebesgue* de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\lim_{\lambda_n(B) \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy = 0$$

en donde las bolas B referidas en el límite pasan por el punto x .

Teorema 7.10. *Casi todos los $x \in \mathbb{R}^n$ son puntos de Lebesgue de una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración [17]. Para todo $q \in \mathbb{Q}$ se cumple que $f - q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (¡pero $f - q \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ aunque $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$!).

Por eso

$$\lim_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \rightarrow 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y) - q| \, dy = |f(x) - q|,$$

para todo $x \in M_q^c$, M_q un conjunto nulo. Tomamos $M = \cup_q M_q$ que es también un conjunto nulo.

Por tanto

$$\overline{\lim}_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \rightarrow 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy \leq$$

$$\lim_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \rightarrow 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f - q| \, dy + |f(x) - q| = 2|f(x) - q|,$$

para todo $x \in M^c$ y todo $q \in \mathbb{Q}$. Haciendo $q \rightarrow f(x)$ alcanzamos la conclusión deseada. $\square$

Podemos finalmente probar el Teorema 7.1.

Demostración del Teorema 7.1. Para $x \in (a, b)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{\lambda_1(I)} \int_I (f(y) - f(x)) \, dy \right| \leq \\ &\frac{1}{\lambda_1(I)} \int_I |f(y) - f(x)| \, dy \leq \frac{2}{\lambda_1(2I)} \int_{2I} |f(y) - f(x)| \, dy, \end{aligned}$$

donde $2I$ es el intervalo de extremos $x \pm h$ (h suficientemente pequeño). De aquí se deduce, vía el Teorema 7.10 que $F'(x) = f(x)$ para casi todo punto $x \in (a, b)$. $\square$

7.2. Teorema de Radon-Nikodym

Ahora nos ocupamos de la segunda versión del teorema fundamental del cálculo en el formato de la integral de Lebesgue. Para una función F definida en el intervalo $[a, b]$ se trata de saber cuándo es cierto que:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt, \quad (7.2)$$

para $x \in [a, b]$. La validez de la identidad requiere en principio lo siguiente.

- i) Existe $F'(x)$ al menos en casi todo punto de (a, b) .
- ii) $F' \in L^1(a, b)$.
- iii) Se da la identidad (7.2) en $[a, b]$.

Bajo estas condiciones se observa que una condición necesaria que debe satisfacer F es que $F \in AC[a, b]$.

Se trata por tanto de indagar, dentro de la clase $AC[a, b]$, cuáles son las funciones F que cumplen (7.2). En la sección precedente hemos encontrado funciones para las que dicha relación es cierta, a saber:

$$F(x) = c + \int_a^x f(t) dt,$$

con $f \in L^1(a, b)$, pues $c = F(a)$ y F es derivable en casi todo punto con $F' = f$. El siguiente resultado establece que la totalidad de $AC[a, b]$ está conformada por funciones que se pueden representar de esta forma.

Teorema 7.11. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- a) $F \in AC[a, b]$.
- b) Existe $f \in L^1(a, b)$ tal que:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt,$$

- c) F es derivable en casi todo punto $F' \in L^1(a, b)$ y se satisface

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt,$$

para $x \in [a, b]$.

Observación 7.6. Debe notarse que la existencia de F' en casi todo punto junto con $F' \in L^1(a, b)$ e incluso la continuidad de F en $[a, b]$ no bastan para garantizar la validez de (7.2). Aclaremos este extremo en la Sección 7.2.1.

7.2.1. Función de Cantor

La función de Cantor $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($I = [0, 1]$) es un ejemplo de función continua no decreciente que cumple:

1. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$,
2. φ es derivable en casi todo punto con derivada $\varphi' = 0$.

La función φ no puede, por tanto, satisfacer la identidad (7.2).

Para construir φ se usa el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ (Sección 1.7):

$$\mathcal{C} = \cap A_n,$$

donde $A_n = \cup I_k^n$ es la generación n -ésima de intervalos, $I_k^n = [a_k^n, b_k^n]$. Se tiene:

$$\varphi = \lim \varphi_n,$$

donde:

- i) φ_n es continua en I , $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 1$,
- ii) φ_n es creciente y de la forma $\alpha x + \beta$ sobre cada I_k^n ,
- iii) $\varphi_n(I_k^n) = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right]$,
- iv) φ_n es constante en $[b_k^n, a_{k+1}^n]$, $k = 1, \dots, 2^n$.

En resumen, para definir φ_n se divide primero la imagen I en intervalos diádicos $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right]$, $k = 1, \dots, 2^n$, después se aplican ordenadamente los I_k^n sobre dichos intervalos mientras φ_n se toma constante en cada uno de los intervalos abiertos que conforman $G_n = I \setminus A_n$.

En base a esta información:

$$\varphi_n(a_k^n) = \frac{k-1}{2^n} \quad \varphi_n(b_k^n) = \frac{k}{2^n} \quad \Rightarrow \Delta\varphi_n = \frac{1}{2^n}.$$

De acuerdo con esto:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n \quad x \in G_n.$$

Como G_n es creciente, se tiene entonces que:

$$\varphi_{n+h} = \varphi_n \quad x \in G_n \quad \forall h.$$

Para probar la afirmación precedente se tiene que un intervalo de G_n es $J_k^n := (b_k^n, a_{k+1}^n)$ donde $\varphi_n = \frac{k}{2^n}$. Éste intervalo coincide con

$$J_{2k}^{n+1} = (b_{2k}^{n+1}, a_{2k+1}^{n+1})$$

donde $\varphi_{n+1} = \frac{2k}{2^{n+1}}$, luego $\varphi_{n+1} = \varphi_n$.

Esto significa que las discrepancias entre φ_{n+1} y φ_n ocurren solamente en los intervalos I_k^n . Es inmediato comprobar que $|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ en cada uno de tales intervalos. Como

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$$

se tiene que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente y que $\varphi = \varphi_n$ en cada uno de los intervalos de G_n . Así pues:

$$\varphi' = 0 \quad x \in \cup G_n = I \setminus \mathcal{C}.$$

Llamamos ahora $G = \cup G_n = \cup_{k=1}^{2^n-1} J_k^{n+1}$ (el paso de la etapa n a la $n+1$ produce 2^n intervalos abiertos nuevos J_k^{n+1}). Vamos a construir un homeomorfismo $g : I \rightarrow I$ con propiedades especiales. Tomamos:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \varphi(x)).$$

g es creciente (estrictamente) y continua. Como los J_k^n son disjuntos es inmediato comprobar que $g(G)$ es una unión disjunta de intervalos luego:

$$\lambda_1(g(G)) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(g(\mathcal{C})) = \frac{1}{2}.$$

Como existe un conjunto $Q \subset g(\mathcal{C})$ que es no medible (Capítulo I), al tomar $E = g^{-1}(Q)$, la aplicación g transforma un conjunto medible E en otro que no lo es.

Finalmente $\mathcal{C}$, que es un boreliano no nulo, ha de tener partes no borelianas. De otro modo, todas las partes de $g(\mathcal{C})$ lo serían.

Listamos las últimas conclusiones:

- a) La σ -álgebra $\mathcal{B}_1$ no es completa ($\mathcal{C}$ es boreliano).
- b) g transforma un conjunto nulo en otro de medida positiva.
- c) Existe un homeomorfismo $g : I \rightarrow I$ que transforma un conjunto medible E en otro que no lo es.

Volveremos a la transformación de conjuntos medibles en el Capítulo 8.

7.2.2. Teorema de Radón–Nikodym

En el Capítulo III se definieron las funciones y medidas absolutamente continuas. Se introduce a continuación una definición diferente, en principio, de medida absolutamente continua.

Definición 7.12. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y ν una medida con signo sobre $\mathcal{A}$. Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ , denotado $\nu \ll \mu$, si $\nu(E) = 0$ siempre que $\mu(E) = 0$.

Observación 7.7. Para una medida con signo μ los conjuntos N satisfaciendo $|\mu|(N) = 0$ están caracterizados por ser $\mu(N') = 0$ para cada $N' \subset N$ medible. Tienen el papel equivalente de los conjuntos nulos para una medida positiva. Consecuentemente, la definición precedente se puede extender a medidas con signo μ reformulándola como sigue: “ $\nu(E) = 0$ cuando $|\mu|(E) = 0$ ” ([9]).

Proposición 7.13. *Sea ν una medida con signo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) $\nu \ll \mu$.
- ii) $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.
- iii) $|\nu| \ll \mu$ donde $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

Establecemos ahora la relación entre las dos nociones de continuidad absoluta para medidas.

Proposición 7.14. *Sea ν una medida positiva finita. Entonces $\nu \ll \mu$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\nu(E) < \varepsilon$ cuando $\mu(E) < \delta$.*

Demostración. Probamos el “ $\Rightarrow$ ”. Si existe ε_0 tal que para todo n existe E_n con $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ tal que

$$\nu(E_n) \geq \varepsilon_0.$$

Tomando

$$E = \overline{\lim} E_n,$$

se comprueba directamente que $\mu(E) = 0$ pues

$$\mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por otro lado:

$$\nu(E) = \nu(\overline{\lim} E_n) \geq \overline{\lim} \nu(E_n) \geq \varepsilon_0,$$

que contradice la nueva definición de continuidad absoluta. □

Una consecuencia inmediata es la siguiente:

Proposición 7.15. *Sea ν una medida con signo finita. Entonces $\nu \ll \mu$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\nu|(E) < \varepsilon$ cuando $\mu(E) < \delta$.*

Se vió en su momento que si $f \in L^1(X)$ entonces

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

es una medida con signo (finita) que cumple $\nu \ll \mu$. El teorema de Radón-Nikodym, que ahora enunciamos, constituye en espacios de medida σ -finita el recíproco de esta propiedad.

El resultado, que establecemos en forma ligeramente más general, requiere la siguiente definición.

Definición 7.16. Se dice que dos medidas con signo λ, μ son mutuamente singulares, denotado $\lambda \perp \mu$, si existen Y, Z medibles disjuntos $X = Y + Z$ tales que $|\lambda|(Z) = |\mu|(Y) = 0$.

Observaciones 7.8.

- a) Si δ es la delta de Dirac, $\lambda_1 = dx$ y δ son mutuamente singulares en $\mathbb{R}$. Por cierto, obsérvese que δ no es absolutamente continua con respecto a dx .
- b) Si ν es una medida con signo entonces $\nu^+ \perp \nu^-$.
- c) En las condiciones de la definición, el “soporte” de λ es Y y el de μ es Z en el sentido de que:

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap Y), \quad \mu(A) = \mu(A \cap Z),$$

para cualquier A medible. Luego tomando $\nu := \lambda + \mu$, $\nu = \lambda$ en X , $\nu = \mu$ en Y .

Proposición 7.17. Sean λ una medida con signo, μ una medida tales que $\lambda \perp \mu$ y $\lambda \ll \mu$. Entonces:

$$\lambda = 0.$$

Demostración. Para todo E se tiene que:

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap Y), \quad \mu(Y) = 0 \Rightarrow \mu(E \cap Y) = 0,$$

por tanto $\lambda(E) = 0$. □

Teorema 7.18 (Radón–Nikodym). Sean μ una medida (positiva) σ -finita y ν una medida con signo finita. Existen entonces medidas con signo λ, ρ tales que:

- a) $\lambda \perp \mu$.
- b) $\rho \ll \mu$, más aún $\rho = f \, d\mu$ para cierta $f \in L^1(X, \mu)$.
- c) $\nu = \lambda + \rho = \lambda + f \, d\mu$.

En particular, si además es $\nu \ll \mu$ se tiene que $\lambda = 0$ y se tiene la representación:

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Observación 7.9. En el último supuesto del teorema se suele denotar:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \mu} = f.$$

La función f está unívocamente determinada módulo discrepancias en un conjunto de medida cero.

La demostración del Teorema de Radón–Nikodym requiere el siguiente resultado auxiliar.

Lema 7.19. Sean λ, μ medidas positivas finitas. Se cumple entonces una de las siguientes opciones: o bien $\lambda \perp \mu$ o bien existen $\varepsilon > 0$ y E medible con medida positiva $\mu(E) > 0$ tal que E es positivo para la medida (con signo) $\lambda - \varepsilon\mu$.

Demostración. Para cada n consideramos la medida con signo

$$\lambda - \frac{1}{n}\mu.$$

Le corresponde una descomposición de Hahn:

$$X = P_n + N_n$$

donde P_n y N_n son positivo, respectivamente. Poniendo $P = \cup P_n$, $P^c = \cap N_n := N$. Como N es negativo para todas las medidas $\lambda - \frac{1}{n}\mu$ resulta que $\lambda(N) = 0$. Ahora se tiene que, o bien $\mu(P) = 0$, que significa $\lambda \perp \mu$, o bien $\mu(P) > 0$ que implica

$$\mu(P_{n_0}) > 0$$

para algún n_0 , y $E = P_{n_0}$ es positivo para:

$$\lambda - \frac{1}{n_0}\mu.$$

□

Demostración del Teorema 7.18. Probamos el teorema en el caso en que ν es una medida positiva y μ es finita. Si el teorema se satisface bajo estas condiciones entonces tiene que ser $f \geq 0$ mientras

$$\int_E f \, d\mu \leq \nu(E)$$

para todo $E \in \mathcal{A}$. Es por ello que introducimos la clase:

$$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow [0, \infty) \text{ medible} : \int_E f \, d\mu \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}\}$$

donde se considera el problema variacional:

$$a = \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_X f \, d\mu.$$

($\mathcal{F}$ es no vacía pues $0 \in \mathcal{F}$). Afirmamos que el supremo se alcanza en una función f_0 de $\mathcal{F}$. En efecto, se tiene primeramente que $f, g \in \mathcal{F}$ implica $\max\{f, g\} \in \mathcal{F}$ pues si $E = \{f > g\}$, $F = E^c$ entonces:

$$\begin{aligned} \int_A \max\{f, g\} \, d\mu &= \int_{A \cap E} \max\{f, g\} \, d\mu + \int_{A \cap F} \max\{f, g\} \, d\mu \leq \\ &\int_{A \cap E} f \, d\mu + \int_{A \cap F} g \, d\mu \leq \nu(A) \end{aligned}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. Por otro lado si

$$\int_X f_n \, d\mu \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad \int_X g_n \, d\mu \rightarrow a,$$

donde $g = \max\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{F}$. Del teorema de la convergencia monótona se deduce que $g_n \rightarrow f_0$, función en la que

$$a = \int_X f_0 \, d\mu.$$

Consideramos ahora la medida positiva:

$$\lambda = \nu - f_0 d\mu.$$

Afirmamos que $\lambda \perp \mu$ pues en caso contrario existen E_0 de medida positiva y ε_0 de forma que E_0 es positivo para la medida $\lambda - \varepsilon_0 \mu$. De aquí se sigue fácilmente que

$$f_0 + \varepsilon_0 \chi_{E_0} \in \mathcal{F}.$$

Pero esto no es posible porque:

$$\int_X (f_0 + \varepsilon_0 \chi_{E_0}) \, d\mu = a + \varepsilon_0 \mu(E_0).$$

Ahora probamos el teorema en el caso ν medida positiva y μ σ -finita. El espacio $X = \cup X_n$, X_n de medida finita. Si $\nu_n(E) = \nu(E \cap X_n)$ entonces:

$$\nu_n = \bar{\lambda}_n + \bar{f}_n \, d\mu$$

en el espacio de medida finita (X_n, μ) . Si definimos la medida λ_n en X como $\lambda_n(E) = \lambda_n(E \cap X_n)$ y f_n es la extensión por cero fuera de X_n notamos que para $E \subset X$:

$$\int_E f_n \, d\mu = \int_{E \cap X_n} \bar{f}_n \, d\mu.$$

De aquí:

$$\nu(X) = \sum_n \nu_n(X) = \sum_n \lambda_n(X) + \sum_n \int_X f_n \, d\mu \geq \sum_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Esto basta ($\nu(X) < \infty$) para escribir:

$$f = \sum_n f_n \in L^1(X)$$

junto con

$$\int_E f \, d\mu = \sum_n \int_E f_n \, d\mu.$$

Por tanto

$$\nu = \lambda + f \, d\mu, \quad \lambda = \sum_n \lambda_n.$$

En el caso general, $\nu = \nu^+ - \nu^-$, $\nu^\pm = \lambda^\pm + f^\pm \, d\mu$ y resulta $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ junto con $f = f^+ - f^-$. Para demostrar $\lambda \perp \mu$ conviene observar que si $X = A + B$ es la descomposición de Hahn de ν entonces λ^+ vive en A y λ^- vive en B .

Finalmente, si $\nu \ll \mu$ entonces $\lambda = \nu - f \, d\mu$ también cumple que $\lambda \ll \mu$, por tanto y según se dijo $\lambda = 0$. $\square$

7.2.3. Demostración del Teorema 7.11

Comenzamos con dos lemas.

Lema 7.20. Sean $F \in AC(\mathbb{R})$ creciente y acotada en $\mathbb{R}$ y $\nu = dF$ la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada. Entonces $dF \ll dx$ donde dx representa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Lema 7.21. Sea $F \in AC[a, b]$. Entonces $F = F_1 - F_2$, donde las F_1, F_2 son crecientes y absolutamente continuas en $[a, b]$.

Demostración del Teorema 7.11. La implicación $b) \Rightarrow c)$ es el teorema de diferenciación de Lebesgue, mientras que $c) \Rightarrow a)$ se conoce desde el Capítulo III.

Nos concentramos en $a) \Rightarrow b)$ y comenzamos por el caso $F \in AC[a, b]$ creciente.

Extendemos F a $\mathbb{R}$ como $F(x) = F(a)$, $F(x) = F(b)$ para $x < a$ y $x > b$ respectivamente. Aplicando el lema precedente tenemos que dF es finita y absolutamente continua en $\mathbb{R}$. Del teorema de Radón-Nikodym existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$dF = f \, dx.$$

Esto significa que para $a < x$ arbitrarios en $\mathbb{R}$,

$$F(x) - F(a) = dF\{(x, a)\} = \int_{(a, x)} f(t) \, dt = \int_a^x f(t) \, dt.$$

En particular para $x \in [a, b]$. Esto prueba el teorema en el caso F creciente. En el caso general y de acuerdo al Lema 7.21, $F = F_1 - F_2$, donde las F_1, F_2 son crecientes y absolutamente continuas en $[a, b]$. Aplicando separadamente el argumento precedente a F_1 y F_2 concluimos la prueba. $\square$

Demostración del Lema 7.20. Hemos de probar que si $\lambda_1(E) = 0$ entonces $\nu(E) = 0$. Suponemos sin pérdida de generalidad que E es acotado. Por ello, dado $\delta > 0$ existe $G \supset E$ abierto acotado tal que $\lambda_1(G) < \delta$. Como $G = \cup I_n$, donde los I_n son intervalos abiertos disjuntos, $\sum \lambda_1(I_n) < \delta$.

Usamos ahora que F es absolutamente continua. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta > 0$ el asociado a la definición y tendremos que:

$$\nu^*(E) \leq \sum \Delta_n F < \varepsilon,$$

con lo que a la postre, $\nu(E) = 0$. $\square$

Demostración del Lema 7.21. En las cuentas que siguen está implícito (ver observación final) el que una función absolutamente continua es de variación acotada en $[a, b]$. Para $x \in [a, b]$ se define:

$$V(x) := V[a, x] := \sup \sum_{k=1}^m |\Delta F_k|$$

donde el supremo se extiende a todas las particiones $\pi = \{x_0 = a \leq \dots \leq x_n = x\}$ del intervalo $[a, x]$ y $\Delta F_k = F(x_k) - F(x_{k-1})$. Es consecuencia de la observación precedente que $V(x)$ es finita. Además se tiene que para $x < y$

$$V(y) = V(x) + V[x, y].$$

En efecto, si π, π' son particiones de $[a, x]$ y $[x, y]$ respectivamente, $\pi'' := \pi \cup \pi'$ es una partición de $[a, y]$:

$$\sum_{\pi} |\Delta F_k| + \sum_{\pi'} |\Delta F_k| = \sum_{\pi''} |\Delta F_k| \leq V(y).$$

Tomando supremos en π :

$$V(x) + \sum_{\pi'} |\Delta F_k| \leq V(y),$$

tomando supremos en π' se sigue $V(x) + V[x, y] \leq V(y)$.

Por otro lado si π'' es cualquier partición de $[a, y]$

$$\sum_{\pi''} |\Delta F_k| \leq \sum_{\pi'' \cup \{x\}} |\Delta F_k| = \sum_{\pi} |\Delta F_k| + \sum_{\pi'} |\Delta F_k| \leq V(x) + V[x, y],$$

donde $\pi = (\pi'' \cup \{x\}) \cap [a, x]$, $\pi' = (\pi'' \cup \{x\}) \cap [x, y]$.

Una consecuencia de todos estos cálculos es que V es creciente. Probamos ahora que V es absolutamente continua en $[a, b]$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que

$$\sum_n |\Delta F_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para toda familia $I_n = (a_n, b_n)$ de intervalos disjuntos con $\sum_n \lambda_1(I_n) < \delta$.

Ahora notamos que $\Delta V_n = V(b_n) - V(a_n) = V[a_n, b_n]$ por lo que para cada n existe una partición π_n de $[a_n, b_n]$ tal que

$$\Delta V_n \leq \sum_{\pi_n} |\Delta F_k| + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Por tanto:

$$\sum_n \Delta V_n \leq \sum_n \sum_{\pi_n} |\Delta F_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

porque:

$$\sum_n \sum_{\pi_n} |\Delta F_k| = \sum_{n,k} |\Delta F_{n,k}|,$$

corresponde a la familia de intervalos $I_{n,k}$, $I_{n,k}$ el k -ésimo intervalo generado por la partición π_n y

$$\sum_n \sum_{\pi_n} \lambda_1(I_{n,k}) = \sum_n \lambda_1(I_n) < \delta.$$

Por tanto $V \in AC[a, b]$.

Como penúltimo paso escribimos:

$$F(x) = V(x) - (V(x) - F(x)) := F_1(x) - F_2(x).$$

Las funciones F_1, F_2 son absolutamente continuas mientras F_2 es creciente. Esto se sigue de:

$$F(y) - F(x) \leq |F(y) - F(x)| \leq V[x, y] = V(y) - V(x),$$

para $x < y$. Así, la prueba está completa. $\square$

Observación 7.10. Si $F \in AC[a, b]$ entonces F es de variación acotada (para las definiciones nos remitimos al Capítulo III). En efecto, dado ε_0 existe δ_0 con

$$\sum_n |\Delta F_n| < \varepsilon_0,$$

para toda familia $I_n = (a_n, b_n)$ de intervalos disjuntos con $\sum_n \lambda_1(I_n) < \delta_0$. Tomamos una partición π_0 de $[a, b]$ con l intervalos que tienen longitud menor que δ_0 . Si π es cualquier partición de $[a, b]$:

$$\sum_{\pi} |\Delta F_k| \leq \sum_{\pi \cup \pi_0} |\Delta F_k| = \sum_{s=1}^l \sum_{\pi_s} |\Delta F_k| \leq l\varepsilon_0,$$

siendo $\pi_s = (\pi \cup \pi_0) \cap I_s$ donde I_s es el s -ésimo intervalo de π_0 . Esto prueba que F es de variación acotada.

Capítulo 8

Teorema del cambio de variable

Se ha visto que para construir un conjunto no medible se requiere el axioma de elección. Parece esto sugerir que no debería ser complicado transformar conjuntos medibles. Sin embargo, se vió en el Capítulo 7 que en general, ni siquiera un homeomorfismo preserva los conjuntos medibles. En la siguiente sección probamos que el que una función continua transforme medibles en medibles es equivalente a que dicha función preserve los conjuntos nulos.

8.1. Transformación de conjuntos medibles

Nuestro primer objetivo es el resultado siguiente.

Teorema 8.1. *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m \geq n$ una aplicación localmente Lipschitziana en G . Entonces $f(E) \in \mathcal{L}_m$ si $E \in \mathcal{L}_n$.*

La demostración se apoya en la siguiente proposición.

Proposición 8.2. *Sea $N \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto nulo y $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, una aplicación localmente Lipschitziana. Entonces $f(N)$ es un conjunto nulo en $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Supongamos para empezar que f es Lipschitz global en N y que:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

para $x, y \in N$, $|\cdot|$ representa la norma infinito. Dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de cubos abiertos I_k , $I_k = x_k + a_k Q$, $Q = (-1, 1)^n$, que recubren N y cumplen

$$\sum \lambda_n(I_k) < \varepsilon.$$

Resulta entonces que si $x, x_0 \in N \cap I_k$ entonces $|f(x) - f(x_0)| \leq a_k L$ luego $f(N \cap I_k) \subset I'_k$ donde I'_k es un cubo de arista $2La_k$. Por tanto:

$$\lambda_m^*(f(N)) \leq \sum \lambda_n(I'_k) < L^m \varepsilon.$$

Esto prueba que $f(N)$ es un conjunto nulo.

En el caso general, cada punto $x \in N$ posee un entorno U_x donde f es Lipschitziana y por tanto $f(U_x)$ es un conjunto nulo. Como $N \subset \mathbb{R}^n$, N es un espacio Lindelöf y $N = \cup U_{x_k}$ luego $f(N) = \cup f(U_{x_k})$ y $f(N)$ es un conjunto nulo. $\square$

Demostración del Teorema 8.1. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible, $E = F + N$, donde N es nulo y F σ -compacto (Propiedad 7.7). Luego $f(E) = f(F) + f(N)$ es un conjunto medible. $\square$

8.2. Fórmula del cambio de variables para aplicaciones lineales

Teorema 8.3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Entonces:

$$\lambda_n(f(E)) = |\det f| \lambda_n(E) \quad \forall E \in \mathcal{L}_n. \quad (8.1)$$

Demostración. Nos podemos concentrar en el caso en que $\det f \neq 0$, de otra forma la afirmación es trivial porque $f(\mathbb{R}^n)$ tiene medida cero.

Se trata ahora de factorizar f en acciones sencillas $f_1, \dots, f_M$ que cumplan la fórmula:

$$\lambda_n(f_i(E)) = |\det f_i| \lambda_n(E)$$

para todo $E \in \mathcal{L}_n$, $1 \leq i \leq M$. Esto prueba el caso general. Tales f_i consisten en realidad en operaciones elementales “fila”. En términos de matrices, las operaciones elementales básicas son:

- i) Sumar la fila “uno” a la fila “dos”.
- ii) Intercambiar las filas i y j .
- iii) Multiplicar la fila “uno” por una constante.

Si A es una matriz $n \times n$, E_i es el resultado de aplicar una de estas operaciones a la matriz identidad I , entonces:

$$A_i = E_i A$$

es el resultado de aplicar la operación a A . Asimismo, las operaciones elementales se codifican como las aplicaciones que tienen matriz asociada (en la base canónica) la de la correspondiente operación. Por ejemplo ii) se corresponde con la aplicación f_i definida por:

$$\{e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_n\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_n\}.$$

Por otro lado, el método de eliminación de Gauss permite “reducir” toda matriz invertible A a la identidad, mediante operaciones elementales. Es decir:

$$I = E_1 \dots E_M A \quad \Leftrightarrow \quad A = E_M^{-1} \dots E_1^{-1}.$$

Las E_j^{-1} son directamente una de las operaciones elementales i), ii), iii) o combinación de éstas. Es decir, lo de arriba es combinación, quizás un poco más larga, de operaciones elementales. Llamando f_i a la aplicación asociada a E_i^{-1} tenemos entonces:

$$f = f_1 \circ \cdots \circ f_M.$$

Ahora afirmamos que todas las f_i cumplen (8.1). Esto es evidente en los casos de ii), iii). Comprobamos la validez para la operación i). Usando la operación ii) consideramos que f corresponde a sumar la fila dos a la fila uno. Si $Q = (0, 1)^n$ medimos $f(Q)$. Las ecuaciones de f son:

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad y' = x' \quad x' = (x_2, \dots, x_n).$$

Luego:

$$f(Q) = \{(y_1, y') : y' \in Q' := (0, 1)^{n-1}, y_2 \leq y_1 \leq y_2 + 1\}.$$

Usando los resultados del Capítulo 6 (ver Observación) es inmediato comprobar que $\lambda_n(f(Q)) = \lambda_n(Q) = 1$. Más aún, las ecuaciones de f^{-1} son las de f cambiando $x_2 \rightarrow -x_2$. Como f^{-1} se obtiene usando las operaciones i) y iii) también f^{-1} cumple (8.1). Finalmente, si E tiene medida finita (basta comprobar este caso) dado ε existe una sucesión de cubos abiertos I_k con $E \subset \cup I_k$ y

$$\sum \lambda_n(I_k) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon \Rightarrow \sum \lambda_n(f(I_k)) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon \Rightarrow \lambda(f(E)) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon.$$

Por tanto $\lambda_n(f(E)) \leq \lambda_n(E)$. Como el resultado se puede aplicar a f^{-1} se tiene que f cumple (8.1). $\square$

Observación 8.1. Por un medio más elemental. Escribimos $f(Q) = A + B$ donde $A = \{y_2 < y_1 < 1\}$, $B = \{1 \leq y_1 < y_2 + 1\}$. Si $B - e_1 = \{0 \leq y_1 < y_2\}$, observamos que $\lambda_n(B - e_1) = \lambda_n(B_1)$ donde $B_1 = \{0 < y_1 \leq y_2\}$. Concluimos:

$$\lambda_n(f(Q)) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B_1) = \lambda_n(Q),$$

que es lo que se quería probar.

8.3. Caso general

Consideremos $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$ una aplicación biyectiva entre los espacios de medida señalados. Supongamos que $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ (es decir, f^{-1} es medible). La medida pull-back $f^*(\nu)$ ($f^*\nu$) de ν (cf. [1]) en X se define como:

$$f^*\nu(E) = \nu(f(E)).$$

En la sección anterior se demostró que para f un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$f^*\lambda_n(E) = \det(f)\lambda_n(E).$$

Lema 8.4. Sean Ω, Q abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $J = [a, b] \subset [a, b] \subset \Omega$ un intervalo de extremos racionales $a, b \in \mathbb{Q}^n$. Si $f \in C^1(\Omega, Q)$ es un difeomorfismo, entonces

$$\lambda_n(f(J)) \leq \int_J |\det(f')| dx.$$

Posponemos la demostración del lema para más adelante. El siguiente nos viene bien.

Lema 8.5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Entonces,

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

es una medida.

Si $f : X \rightarrow [0, \infty]$ es una función medible se tiene:

$$\int g d\mu d\nu = \int g d\mu f d\mu.$$

Finalmente, si $f > 0$ en casi todo punto entonces ν es completa si μ lo es.

Demostración. La afirmación es cierta si f es simple. En el caso general $f = \lim f_n$ donde las f_n son simples. Las funciones:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

son medidas y $\nu(E) = \lim \nu_n(E) = \sup \nu_n(E)$. Se concluye inmediatamente que ν es una medida. En efecto, si $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia disjunta y $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$:

$$\nu_n(E) = \sum_k \nu_n(E_k) \leq \sum_k \nu(E_k) \Rightarrow \nu(E) \leq \sum_k \nu(E_k).$$

Por otro lado, para N fijo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \nu(E_k) &= \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \nu_n(E_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\cup_{k=1}^N E_k) = \nu(\cup_{k=1}^N E_k) \leq \nu(E). \end{aligned}$$

En cuanto a la segunda afirmación, ésta es inmediata si g es simple y en general $g = \lim g_n$ con g_n una sucesión monótona de funciones simples. Por tanto:

$$\int g d\mu d\nu = \lim \int g d\mu_n d\nu = \lim \int g d\mu_n f d\mu = \int g d\mu f d\mu.$$

□

Proposición 8.6. Sea $f \in C^1(\Omega, Q)$ un difeomorfismo. Entonces, para todo conjunto medible $E \subset \Omega$ se tiene que

$$\lambda_n(f(E)) = \int_E |\det(f')| \, dx. \quad (8.2)$$

Demostración. Para empezar se tiene que

$$\nu(E) = \int_E |\det(f')| \, dx$$

es una medida completa en Ω . Queremos ver que $\lambda_n(f(E)) = \nu(E)$ para todo E . Comenzamos comprobando que:

$$\lambda_n(f(E)) \leq \nu(E), \quad (8.3)$$

para todo E .

Como todo abierto $G \subset \Omega$ se escribe como $G = \cup Q_k$ donde los Q_k son cubos diádicos:

$$\lambda_n(f(G)) = \sum \lambda_n(f(Q_k)) \leq \sum \nu(Q_k) = \nu(G).$$

Suponemos ahora que $E \subset \Omega$ es acotado y $\text{dist}(E, \partial\Omega) > 0$. Entonces $E \subset B = \lim G_k$ donde $G_k \subset \overline{G}_k \subset \Omega$ es una sucesión decreciente de abiertos. Finalmente, $\lambda_n(B) = \lambda_n(E)$. Entonces:

$$\lambda_n(f(E)) \leq \lambda_n(f(B)) = \lim \lambda_n(f(G_k)) \leq \lim \mu(G_k) = \nu(B) = \nu(E).$$

Si $E \subset \Omega$ es cualquier conjunto medible, $E = \lim E_k$ donde los E_k están en las condiciones precedentes y forman una sucesión creciente. Así:

$$\lambda_n(f(E)) = \lim \lambda_n(f(E_k)) \leq \lim \mu(E_k) = \nu(E),$$

por teorema de la convergencia monótona. La desigualdad (8.3) ha sido demostrada.

Ahora observamos que (8.3) se puede escribir como:

$$\int_Q \chi_{f(E)}(y) \, dy \leq \int_\Omega \chi_{f(E)} \circ f(x) |\det(f')(x)| \, dx = \int_\Omega \chi_{f(E)} \circ f \, d\nu.$$

Por tanto la desigualdad:

$$\int_Q g(y) \, dy \leq \int_\Omega g \circ f(x) |\det(f')(x)| \, dx = \int_\Omega g \circ f \, d\nu,$$

es cierta para funciones simples no negativas y de ahí, por paso al límite y convergencia monótona, para funciones medibles $g : Q \rightarrow [0, \infty]$.

Intercambiando ahora los papeles de Ω y Q , usando f^{-1} en lugar de f se tiene:

$$\int_\Omega g \circ f(x) |\det(f')(x)| \, dx \leq \int_Q g \circ f \circ f^{-1}(y) |\det(f')(f^{-1}(y))| |\det(f^{-1})'(y)| \, dy,$$

de donde:

$$\int_{\Omega} g \circ f(x) |\det(f')(x)| dx \leq \int_Q g(y) dy.$$

Hemos concluido entonces que para toda función medible $g : Q \rightarrow [0, \infty]$ se cumple

$$\int_Q g(y) dy = \int_{\Omega} g \circ f(x) |\det(f')(x)| dx. \quad (8.4)$$

La relación (8.2) se sigue inmediatamente de (8.4). $\square$

Teorema 8.7. *En las condiciones precedentes, $g \in L^1(Q)$ si y solamente si $g \circ f |\det f'(\cdot)| \in L^1(\Omega)$ y se cumple la relación (8.4).*

Observación 8.2. Supongamos que $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$ es biyectiva y cumple $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, para todo $F \in \mathcal{B}$. Entonces:

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{M}(Y) &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}$ representa la clase de las funciones medibles, está bien definido. f^* se denomina el operador pull-back asociado a f .

Corolario 8.8. *Para Ω, Q y f en las condiciones precedentes y $g \in L^1(Q)$ se tiene:*

$$\int_Q g dy = \int_{\Omega} f^*(g) d(f^*\lambda_n),$$

donde $d(f^*\lambda_n)$ es la medida pull-back de λ_n vía f .

Demostración del Lema 8.4 ([1]). En primer lugar se observa que J se puede poner como una unión disjunta $J = \cup_{k=1}^N J_k$ de cubos semiabiertos $[a_k, b_k)$ de diámetro tan pequeño como se quiera.

Usamos ahora la norma infinito $|x|_{\infty} = \max |x_i|$. Un cubo Q de arista r y centro x_0 se escribe como $Q = [x_0 - \frac{r}{2}\mathbf{1}, x_0 + \frac{r}{2}\mathbf{1})$. $\lambda_n(Q) = r^n$. Por otro lado:

$$f(Q) \subset \overline{B}\left(f(x_0), \frac{Kr}{2}\right) \Rightarrow \lambda_n(f(Q)) \leq K^n r^n = K^n \lambda_n(J),$$

donde $K = \sup_{\overline{Q}} |f'|$.

Usando la descomposición de J tenemos:

$$\lambda_n(f(J)) = \sum_k \lambda_n(f(J_k)).$$

Elegimos $x_k \in \overline{J}_k$ tal que $|\det f'(x_k)| = \min_{\overline{J}_k} |\det f'|$ y ponemos $T_k = f'(x_k)$. Así:

$$\begin{aligned} \lambda_n(f(J)) &= \sum_k \lambda_n(T_k \circ T_k^{-1} \circ f(J_k)) = \sum_k \lambda_n(T_k^{-1} \circ f(J_k)) |\det T_k| \leq \\ &\sum_k \left\{ \sup_{\overline{J}_k} |T_k^{-1} f'| \right\}^n \lambda_n(J_k) |\det T_k| \leq \alpha \int_J |\det f'(x)| dx, \end{aligned}$$

donde $\alpha = \max_k \{\sup_{\bar{J}_k} |T_k^{-1} f'|\}^n$.

Para estimar α ponemos:

$$T_k^{-1} f'(x) = I + T_k^{-1}(f'(x) - f'(x_k)),$$

luego, tomando $\beta = \sup_{\bar{J}} |(f^{-1})'|$,

$$|T_k^{-1} f'(x)| \leq 1 + \beta \sup_{\bar{J}_k} |f'(x) - f'(x_k)| \leq 1 + \varepsilon,$$

supuesto que el diámetro de los J_k se ha tomado suficientemente pequeño como para que la oscilación de $f'(x)$ sea menor que ε/β en cada uno de ellos. Por tanto,

$$\lambda_n(f(J)) \leq (1 + \varepsilon)^n \int_J |\det f'(x)| dx,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por tanto, hemos terminado. $\square$

8.4. Coordenadas esféricas

En $\mathbb{R}^n$ tomamos ($n \geq 2$):

$$H = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n,$$

y la función:

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus H \\ (r, \varphi, \theta) &\longmapsto x = F(r, \varphi, \theta) = r\Phi(\varphi, \theta), \end{aligned}$$

definida como:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & r \cos \varphi & \text{sen } \theta_1 & \cdots & \text{sen } \theta_{n-3} & \text{sen } \theta_{n-2} \\ x_2 & = & r \text{sen } \varphi & \text{sen } \theta_1 & \cdots & \text{sen } \theta_{n-3} & \text{sen } \theta_{n-2} \\ x_3 & = & & r \cos \theta_1 & \cdots & \text{sen } \theta_{n-3} & \text{sen } \theta_{n-2} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & & & \cdots & r \cos \theta_{n-3} & \text{sen } \theta_{n-2} \\ x_n & = & & & \cdots & & r \cos \theta_{n-2}, \end{array}$$

siendo $r = |x|$. Se prueba por inducción que F es biyectiva. Esto vale para $n = 2$ y probado para n tomamos $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus H_{n+1}$. Entonces $x' \in \mathbb{R}^n \setminus H_n$ (para eso se define H), donde x' es la proyección ortogonal de x en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Escribimos:

$$x = (x', 0) + x_{n+1}e_{n+1},$$

con

$$x_{n+1} = r \cos \theta_{n-1} \quad \theta_{n-1} \in (0, \pi).$$

Entonces $|x'| = r \text{sen } \theta_{n-1}$. De ahí:

$$\begin{cases} x' = r \text{sen } \theta_{n-1} \Phi(\varphi, \theta) \\ x_{n+1} = r \cos \theta_{n-1}. \end{cases}$$

Esto prueba la construcción de F y la afirmación de biyectividad.

Bibliografía

- [1] AMANN H., ESCHER J., *Analysis III*, Birkhäuser, Basel, 2009.
- [2] APOSTOL T. M., *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1982.
- [3] APOSTOL T. M., *Calculus* (2 Vols.), Reverté, Barcelona, 19**.
- [4] BREZIS, H., *Análisis Funcional*. Alianza, Madrid, 1983.
- [5] CERDÁ J., *Análisis Real*, Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 2000.
- [6] CHOQUET G., *Topología*, Toray-Masson, Zaragoza, 1971.
- [7] COPPEL, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.
- [8] FOLLAND G. B., *Real Analysis*, Wiley, NY, 1999.
- [9] FRIEDMAN A., *Foundations of Modern Analysis*, Dover, NY, 1982.
- [10] HEWIT E., STROMBERG K., *Real and abstract analysis*, Springer, New York, 1965.
- [11] MIJÁILOV V. P., *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Mir, Moscú, 1978.
- [12] KLINE M., *Pensamientos matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días* (3 Vols.), Alianza Universidad, Madrid, 1990.
- [13] MARGALEF J., OUTERELO E., PINILLA J., *Topología, Vol. I*, Alhambra, Madrid, 1980.
- [14] RUDIN W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1976.
- [15] RUDIN W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1987.
- [16] SHILOV, G. E., *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover, New York, 1973.
- [17] STEIN E., SHAKARCHI R., *Real Analysis*, Princenton University Press, Princenton, 2005.

- [18] WILLARD S., *General Topology*, Addison-Wesley, Massachussets, 1970.

Índice alfabético

función de Cantor, 148

teorema de Radón–Nikodym, 151

teorema fundamental del cálculo, 147